Bolas en espacios normados

(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

19 de septiembre de 2022

Propiedades de bolas en un espacio métrico (repaso)

Sea (X, d) un espacio métrico.

$$B(a, r) := \{x \in X : \ d(x, a) < r\} \qquad (a \in X, \ r > 0).$$

- Sobre bolas concéntricas:
  si $a \in X$, $0 < r_1 < r_2$, entonces $B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2)$.
- Sobre una bola contenida en otra:
  si $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$, $d(a_1, a_2) + r_1 \leq r_2$, entonces $B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2)$.
- Sobre bolas disjuntas:
  si $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$, $r_1 + r_2 \leq d(a_1, a_2)$, entonces $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset$.

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X + Y \;:=\; \Big\{ v \in V : \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x + y \Big\}.$$

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X + Y \ := \ \Big\{ v \in V : \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x + y \Big\}.$$

Esta definición se puede escribir también en forma abreviada:

$$X + Y = \{ x + y : \quad x \in X, \quad y \in Y \}.$$

La suma de dos conjuntos en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X + Y \ := \ \left\{ v \in V\colon \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x + y \right\}.$$

Esta definición se puede escribir también en forma abreviada:

$$X + Y = \{x + y\colon \quad x \in X, \quad y \in Y\}.$$

En las demostraciones hay que usar la definición verdadera (con los cuantificadores $\exists$).

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$\boxed{u + Y \;:=\; \{u\} + Y.}\,.$$

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$u + Y \;:=\; \{u\} + Y. \,.$$

Obviamente,

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad \exists y \in Y \quad v = u + y \Big\}.$$

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$u + Y \; := \; \{u\} + Y. \, .$$

Obviamente,

$$u + Y = \Big\{ v \in V \colon \quad \exists y \in Y \quad v = u + y \Big\}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$u + Y = \Big\{ v \in V \colon \quad v - u \in Y \Big\}.$$

La suma de un vector y un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $u \in V$, $Y \subseteq V$.

$$u + Y \;:=\; \{u\} + Y. .$$

Obviamente,

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad \exists y \in Y \quad v = u + y \Big\}.$$

Ejercicio. Demostrar que

$$u + Y = \Big\{ v \in V : \quad v - u \in Y \Big\}.$$

La última fórmula no tiene el cuantificador $\exists$, por eso es más cómoda en varias situaciones.

El producto de un escalar por un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $Y \subseteq V$.

$$\lambda Y \;:=\; \Big\{ v \in V\colon \quad \exists y \in Y \quad v = \lambda y \Big\}.$$

El producto de un escalar por un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $Y \subseteq V$.

$$\lambda Y \;:=\; \left\{ v \in V : \quad \exists y \in Y \quad v = \lambda y \right\}.$$

Ejercicio. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda Y = \left\{ v \in V : \quad \frac{1}{\lambda} v \in Y \right\}.$$

El producto de un escalar por un conjunto en un espacio vectorial (repaso)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $Y \subseteq V$.

$$\lambda Y \;:=\; \Big\{ v \in V\colon \quad \exists y \in Y \quad v = \lambda y \Big\}.$$

Ejercicio. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que

$$\lambda Y = \left\{ v \in V\colon \quad \frac{1}{\lambda} v \in Y \right\}.$$

Ejercicio. Sea $Y \subseteq V$, $Y \neq \emptyset$. Demostrar que

$$0\,Y = \{0_V\}.$$

La diferencia aritmética de dos conjuntos

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X - Y \;:=\; \Big\{ v \in V\colon \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x - y \Big\}.$$

La diferencia aritmética de dos conjuntos

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X - Y \;:=\; \Big\{ v \in V\colon \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x - y \Big\}.$$

Observación. En la teoría de conjuntos siempre usamos la notación $X \setminus Y$.

La diferencia aritmética de dos conjuntos

Sea V un espacio vectorial complejo y sean $X, Y \subseteq V$.

$$X - Y \ := \ \Big\{ v \in V : \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad v = x - y \Big\}.$$

Observación. En la teoría de conjuntos siempre usamos la notación $X \setminus Y$.

Ejercicio. Demostrar que

$$X - Y = X + (-1)Y.$$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$B(a, r) = \{v \in V : \quad \|v - a\| < r\}.$$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$B(a, r) = \{v \in V : \quad \|v - a\| < r\}.$$

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo.
Demostrar las siguientes propiedades:

$$B(a, r) = a + B(0_V, r), \qquad B(0_V, r) = r\, B(0_V, 1), \qquad B(a, r) = a + r\, B(0_V, 1).$$

Propiedades de bolas en un espacio normado

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Entonces

$$B(a,r) = \{v \in V\colon \quad \|v-a\| < r\}.$$

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo.

Demostrar las siguientes propiedades:

$$B(a,r) = a + B(0_V, r), \qquad B(0_V, r) = r\,B(0_V, 1), \qquad B(a,r) = a + r\,B(0_V, 1).$$

Se recomienda usar las fórmulas

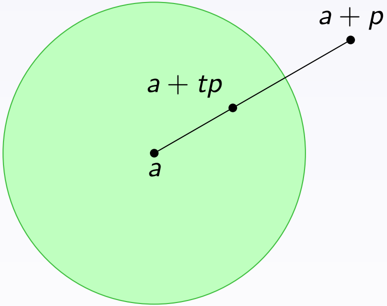
$$a + Y \;=\; \{v \in V\colon\; v - a \in Y\}, \qquad r\,Y \;=\; \left\{v \in V\colon \quad \frac{1}{r}v \in Y\right\}.$$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$. Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \quad \Longleftrightarrow \quad t <$$

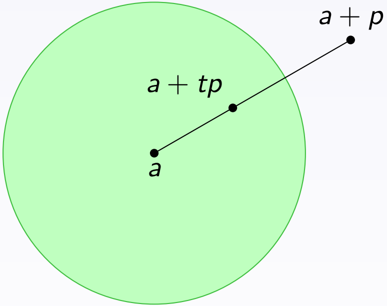


La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$. Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



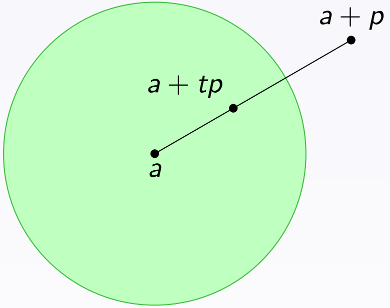
Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$. Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r \quad \Longleftrightarrow$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

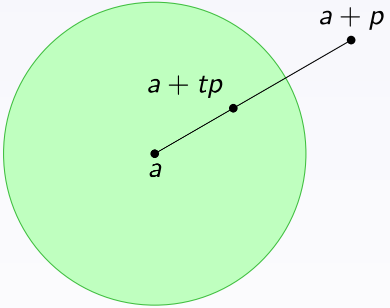
Proposición

Sea V un espacio normado complejo

y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$.

Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



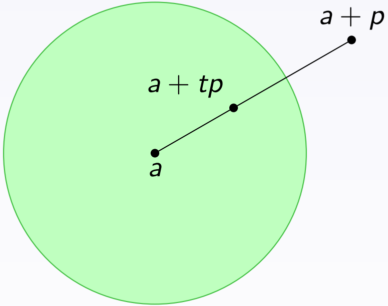
Demostración: $\quad \|(a + tp) - a\| < r \quad \Longleftrightarrow \quad t\,\|p\| < r$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$. Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t <$$



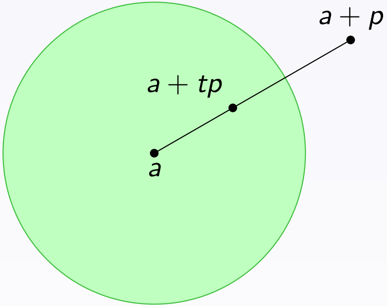
Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r \quad \Longleftrightarrow \quad t\,\|p\| < r \quad \Longleftrightarrow$

La bola en un espacio normado contiene ciertos segmentos de los rayos que inician en el centro

Proposición

Sea V un espacio normado complejo
y sean $a \in V$, $r > 0$, $p \in V \setminus \{0_V\}$, $t > 0$.
Entonces

$$a + t\,p \in B(a, r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t < \frac{r}{\|p\|}.$$



Demostración: $\|(a + tp) - a\| < r \quad \Longleftrightarrow \quad t\,\|p\| < r \quad \Longleftrightarrow \quad t < \dfrac{r}{\|p\|}.$

La suma de dos bolas en un espacio normado

Proposición

Sean $r_1, r_2 > 0$. Entonces

$$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) = B(0_V, r_1 + r_2).$$

La suma de dos bolas en un espacio normado

Proposición

Sean $r_1, r_2 > 0$. Entonces

$$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) = B(0_V, r_1 + r_2).$$

Demostración. La contención $\subseteq$ sale de la propiedad subaditiva de la norma.

La suma de dos bolas en un espacio normado

Proposición

Sean $r_1, r_2 > 0$. Entonces

$$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) = B(0_V, r_1 + r_2).$$

Demostración. La contención $\subseteq$ sale de la propiedad subaditiva de la norma.

Mostremos la contención $\supseteq$.

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v =$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v,$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\|$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| <$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1,$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\|$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| <$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, inicio de demostración

Sea $v \in B(0_V, r_1 + r_2)$. Entonces $\|v\| < r_1 + r_2$.

Tenemos que construir x, y tales que

$$v = x + y, \qquad \|x\| < r_1, \qquad \|y\| < r_2.$$

Buscamos x, y en forma $\quad x = \lambda_1 v, \quad y = \lambda_2 v, \quad$ con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Entonces λ_1 y $\lambda_2 > 0$ tienen que satisfacer las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 =$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1| \, \|v\|$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1| \, \|v\| <$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1| \, \|v\| < r_1,$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1|\,\|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2|\,\|v\|$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1| \, \|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2| \, \|v\| <$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1|\,\|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2|\,\|v\| < r_2.$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1|\,\|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2|\,\|v\| < r_2.$$

Recordemos que $\|v\| < r_1 + r_2$.

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1|\,\|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2|\,\|v\| < r_2.$$

Recordemos que $\|v\| < r_1 + r_2$.

Es fácil adivinar una solución:

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1|\,\|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2|\,\|v\| < r_2.$$

Recordemos que $\|v\| < r_1 + r_2$.

Es fácil adivinar una solución:

$$\lambda_1 = \qquad\qquad \lambda_2 =$$

$B(0_V, r_1) + B(0_V, r_2) \supseteq B(0_V, r_1 + r_2)$, final de demostración

$$\lambda_1 v + \lambda_2 v = v, \qquad \|\lambda_1 v\| < r_1, \qquad \|\lambda_2 v\| < r_2.$$

En otras palabras, buscamos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ con las siguientes propiedades:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad |\lambda_1|\,\|v\| < r_1, \qquad |\lambda_2|\,\|v\| < r_2.$$

Recordemos que $\|v\| < r_1 + r_2$.

Es fácil adivinar una solución:

$$\lambda_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}, \qquad \lambda_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}.$$

La suma de dos bolas en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$. Demostrar que

$$B(a_1, r_1) + B(a_2, r_2) = B(a_1 + a_2, r_1 + r_2).$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r)$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r) =$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r).$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r).$$

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que

$$0\, B(a, r)$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r).$$

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que

$$0\, B(a, r) =$$

El producto de un escalar por una bola en un espacio normado

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrar que

$$\lambda\, B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda| r).$$

Ejercicio. Sean $a \in V$, $r > 0$. Mostrar que

$$0\, B(a, r) = \{0_V\}.$$

La diferencia de bolas en un espacio normado

Ejercicio. Encontrar

$$B(a_1, r_1) - B(a_2, r_2), \qquad B(0_V, r_1) - B(0_V, r_1).$$

Las bolas cubren el espacio normado

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo. Mostrar que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B(0_V, k) = \bigcup_{r>0} B(0_V, r) = V.$$

El interior de subespacios de un espacio normado

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que $\operatorname{int}(W) \neq \emptyset$. Demostrar que $W = V$.

El interior de subespacios de un espacio normado

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que $\operatorname{int}(W) \neq \emptyset$. Demostrar que $W = V$.

Sugerencia: primero demostrar que existe $r > 0$ tal que $B(0_V, r) \subseteq W$.

El interior de subespacios de un espacio normado

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que $\operatorname{int}(W) \neq \emptyset$. Demostrar que $W = V$.

Sugerencia: primero demostrar que existe $r > 0$ tal que $B(0_V, r) \subseteq W$.

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que $W \neq V$. Demostrar que $\operatorname{int}(W) = \emptyset$.

Convexidad de bolas en espacios normados

Proposición

Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Convexidad de bolas en espacios normados

Proposición

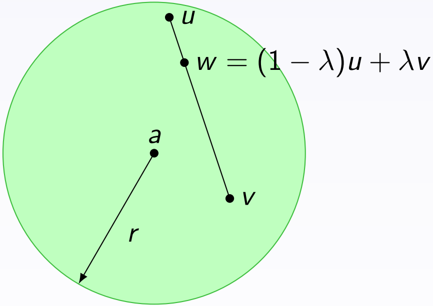
Sean $a \in V$, $r > 0$. Entonces $B(a, r)$ es convexa.

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$,

$$w := (1 - \lambda)u + \lambda v.$$

Mostremos que

$$\|w - a\| < r.$$



Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$.

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\|w - a\|$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\|w - a\| =$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\|w - a\| = \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\|$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\|w - a\| = \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| =$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\|w - a\| = \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\|$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\ &\leq\end{aligned}$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\
&\leq \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\|
\end{aligned}
$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\
&\le \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| =
\end{aligned}
$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \|w-a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\ &\le \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\|u-a\| + \underbrace{\lambda}_{>0}\|v-a\| \end{aligned}$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\
&\le \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| = \underbrace{(1 - \lambda)}_{>0} \|u - a\| + \underbrace{\lambda}_{>0} \|v - a\| \\
&<
\end{aligned}
$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|w-a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\
&\le \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\|u-a\| + \underbrace{\lambda}_{>0}\|v-a\| \\
&< (1-\lambda)r + \lambda r
\end{aligned}$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|w-a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\
&\le \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\|u-a\| + \underbrace{\lambda}_{>0}\|v-a\| \\
&< (1-\lambda)r + \lambda r =
\end{aligned}$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a,r)$, $\lambda \in [0,1]$, $\quad w := (1-\lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a,r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a,r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1-\lambda)u + \lambda v - (1-\lambda)a - \lambda a\| = \|(1-\lambda)(u-a) + \lambda(v-a)\| \\
&\le \|(1-\lambda)(u-a)\| + \|\lambda(v-a)\| = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\|u-a\| + \underbrace{\lambda}_{>0}\|v-a\| \\
&< (1-\lambda)r + \lambda r = r.
\end{aligned}
$$

Convexidad de bolas en espacios normados, demostración

Sean $u, v \in B(a, r)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\quad w := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Mostremos que $w \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 0$, entonces $w = u \in B(a, r)$.

Si $\lambda = 1$, entonces $w = v \in B(a, r)$.

Supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|w - a\| &= \|(1 - \lambda)u + \lambda v - (1 - \lambda)a - \lambda a\| = \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| \\
&\leq \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| = \underbrace{(1 - \lambda)}_{>0} \|u - a\| + \underbrace{\lambda}_{>0} \|v - a\| \\
&< (1 - \lambda)r + \lambda r = r.
\end{aligned}
$$

Hemos mostrado que $w \in B(a, r)$.

Propiedades de bolas en un espacio normado

Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $V \neq \{0_V\}$.
Demostrar las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
B(a_1, r_1) \subseteq B(a_1, r_2) \qquad &\Longrightarrow \qquad r_1 \leq r_2,\\
B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2) \qquad &\Longrightarrow \qquad \|a_1 - a_2\| + r_1 \leq r_2,\\
B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset \qquad &\Longrightarrow \qquad r_1 + r_2 \leq \|a_1 - a_2\|.
\end{aligned}
$$

Se recomienda demostrar estas propiedades en forma contrapositiva:

$$
r_1 > r_2 \qquad \Longrightarrow \qquad B(a_1, r_1) \setminus B(a_1, r_2) \neq \emptyset.
$$

En cada caso hay que construir un vector.

Ejercicio. Sean V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a \in V$, $r_1, r_2 > 0$.

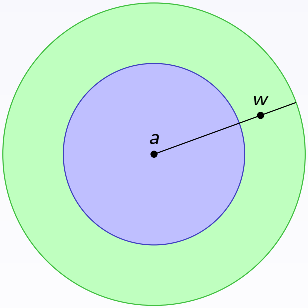
$$r_1 < r_2.$$

Demostrar que $B(a, r_2) \setminus B(a, r_1) \neq \emptyset$.

Ejercicio. Sean V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a \in V$, $r_1, r_2 > 0$.

$$r_1 < r_2.$$

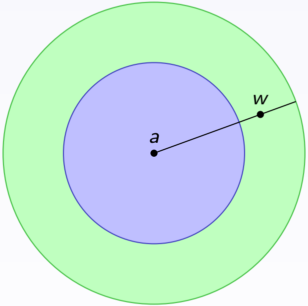
Demostrar que $B(a, r_2) \setminus B(a, r_1) \neq \emptyset$.



Ejercicio. Sean V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a \in V$, $r_1, r_2 > 0$.

$$r_1 < r_2.$$

Demostrar que $B(a, r_2) \setminus B(a, r_1) \neq \emptyset$.



Sea $b \in V \setminus \{0_V\}$.

Construir $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$w := a + \lambda b,$$

tal que

$$r_1 \leq \|w - a\| < r_2.$$

Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

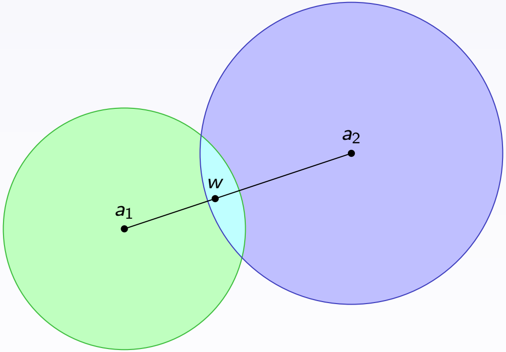
$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.

Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

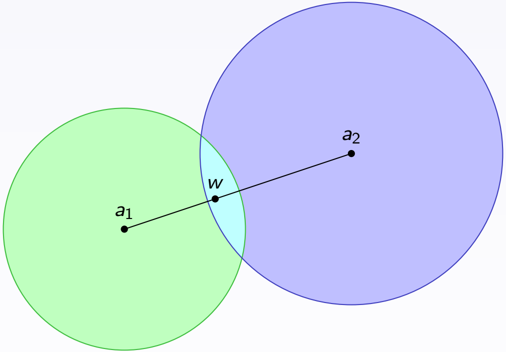
Demostrar que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Ejercicio. Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| < r_1 + r_2.$$

Demostrar que $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Construir $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$w := (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2,$$

tal que

$$\|w - a_1\| < r_1, \quad \|w - a_2\| < r_2.$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

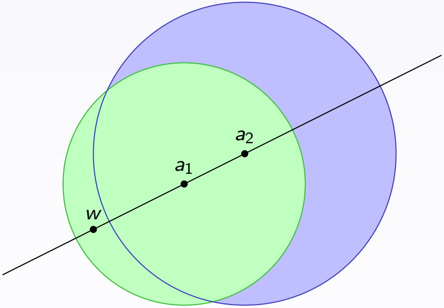
Entonces $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

Entonces $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.

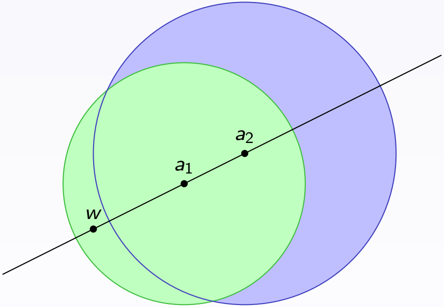


Proposición

Sea V un espacio vectorial, $V \neq \{0_V\}$, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$,

$$\|a_1 - a_2\| + r_1 > r_2.$$

Entonces $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2) \neq \emptyset$.



Excluimos el caso $a_1 = a_2$
(es uno de los ejercicios anteriores).

Vamos a construir $\lambda > 0$,

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2),$$

tal que $\quad \|w - a_1\| < r_1, \quad \|w - a_2\| \geq r_2.$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2)$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) =$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\|$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| =$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1+\lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\|$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| =$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1+\lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1+\lambda)\|a_1 - a_2\|.$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda <$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|},$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1+\lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1+\lambda)\|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda \geq$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda \geq \frac{r_2 - \|a_1 - a_2\|}{\|a_1 - a_2\|}.$$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1+\lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1+\lambda)\|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda \geq \frac{r_2 - \|a_1 - a_2\|}{\|a_1 - a_2\|}.$$

Gracias a la suposición $r_1 > r_2 - \|a_1 - a_2\|$, una solución es λ

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda \geq \frac{r_2 - \|a_1 - a_2\|}{\|a_1 - a_2\|}.$$

Gracias a la suposición $r_1 > r_2 - \|a_1 - a_2\|$, una solución es $\quad \lambda =$

Demostración

Construimos w de la siguiente forma (con $\lambda > 0$):

$$w := a_1 + \lambda(a_1 - a_2) = (1 + \lambda)a_1 - \lambda a_2.$$

Entonces

$$\|w - a_1\| = \lambda \|a_1 - a_2\|, \qquad \|w - a_2\| = (1 + \lambda) \|a_1 - a_2\|.$$

Buscamos λ de tal manera que $w \in B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$, esto es,

$$\lambda < \frac{r_1}{\|a_1 - a_2\|}, \qquad \lambda \geq \frac{r_2 - \|a_1 - a_2\|}{\|a_1 - a_2\|}.$$

Gracias a la suposición $r_1 > r_2 - \|a_1 - a_2\|$, una solución es $\quad \lambda = \dfrac{r_2 - \|a_1 - a_2\|}{\|a_1 - a_2\|}.$