Bolas en espacios métricos (un tema de análisis)

Egor Maximenko,
https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

8 de octubre de 2022

Objetivo.

Estudiar propiedades elementales de bolas en espacios métricos:

- la contención de bolas concéntricas,
- una condición suficiente para que dos bolas sean disjuntas,
- una condición suficiente para que una bola esté contenida en otra.

Objetivo.

Estudiar propiedades elementales de bolas en espacios métricos:

- la contención de bolas concéntricas,
- una condición suficiente para que dos bolas sean disjuntas,
- una condición suficiente para que una bola esté contenida en otra.

Prerrequisitos.

Espacios métricos, corolarios elementales de la desigualdad del triángulo.

Bola con centro dado y de radio dado

Suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Bola con centro dado y de radio dado

Suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Definición

Sean $a \in X$, $r > 0$.

$$B(a, r) := \{x \in X : \ d(x, a) < r\}.$$

El centro de la bola pertenece a la bola

$$B(a,r) := \{x \in X \colon \ d(x,a) < r\}.$$

Proposición

Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces $a \in B(a,r)$.

El centro de la bola pertenece a la bola

$$B(a, r) := \{x \in X : \; d(x, a) < r\}.$$

Proposición

Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces $a \in B(a, r)$.

Demostración.

$$d(a, a)$$

El centro de la bola pertenece a la bola

$$B(a, r) := \{x \in X \colon \ d(x, a) < r\}.$$

Proposición

Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces $a \in B(a, r)$.

Demostración.

$$d(a, a) =$$

El centro de la bola pertenece a la bola

$$B(a, r) := \{x \in X : \; d(x, a) < r\}.$$

Proposición

Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces $a \in B(a, r)$.

Demostración.

$$d(a, a) = 0$$

El centro de la bola pertenece a la bola

$$B(a, r) := \{x \in X : \; d(x, a) < r\}.$$

Proposición

Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces $a \in B(a, r)$.

Demostración.

$$d(a, a) = 0 <$$

El centro de la bola pertenece a la bola

$$B(a, r) := \{x \in X \colon \ d(x, a) < r\}.$$

Proposición

Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces $a \in B(a, r)$.

Demostración.

$$d(a, a) = 0 < r.$$

Bolas concéntricas

Proposición

Sean $a \in X$, $r_1, r_2 > 0$, $r_1 < r_2$. Entonces

$$B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2).$$

Bolas concéntricas

Proposición

Sean $a \in X$, $r_1, r_2 > 0$, $r_1 < r_2$. Entonces

$$B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2).$$

Las demostraciones en este tema son simples y se dejan como ejercicios.

Bolas concéntricas

Corolario

Sean $a \in X$, $r_1, r_2 > 0$. Entonces

$$B(a, r_1) \cap B(a, r_2) = B(a, \min\{r_1, r_2\}), \qquad B(a, r_1) \cup B(a, r_2) = B(a, \max\{r_1, r_2\}).$$

Bolas concéntricas

Ejercicio. Construir un ejemplo tal que

$$r_1 < r_2, \qquad B(a, r_1) = B(a, r_2).$$

Bolas disjuntas

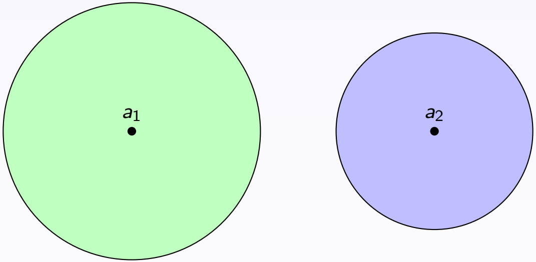
Ejercicio. Encontrar una condición suficiente para que

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset.$$

Bolas disjuntas

Ejercicio. Encontrar una condición suficiente para que

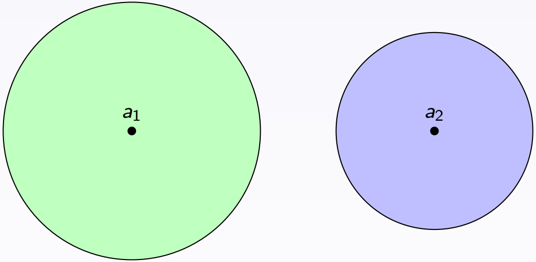
$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset.$$



Bolas disjuntas

Ejercicio. Encontrar una condición suficiente para que

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset.$$



Una respuesta está en la siguiente página.

Bolas disjuntas

Proposición

Sean $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$d(a_1, a_2) \geq r_1 + r_2.$$

Entonces

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset.$$

Bolas disjuntas

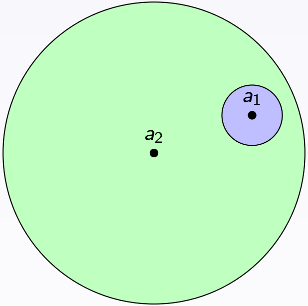
Ejercicio. Construir un ejemplo tal que

$$d(a_1, a_2) < r_1 + r_2, \qquad B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset.$$

Contención de bolas

Ejercicio. Encontrar una condición suficiente para la siguiente contención:

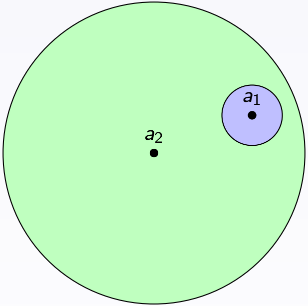
$$B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2).$$



Contención de bolas

Ejercicio. Encontrar una condición suficiente para la siguiente contención:

$$B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2).$$



Una respuesta está en la siguiente página.

Contención de bolas

Proposición

Sean $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$d(a_1, a_2) + r_1 \leq r_2.$$

Entonces

$$B(a_1, r_1) \subseteq B(a_2, r_2).$$

(El razonamiento principal para mostrar que la bola abierta es abierta)

Corolario

Sean $a \in X$, $r > 0$, $x \in B(a, r)$. Entonces existe $s > 0$ tal que

$$B(x, s) \subseteq B(a, r).$$

(El razonamiento principal para mostrar que la bola abierta es abierta)

Corolario

Sean $a \in X$, $r > 0$, $x \in B(a, r)$. Entonces existe $s > 0$ tal que

$$B(x, s) \subseteq B(a, r).$$

Idea de demostración: usar la proposición anterior, construir s de manera explícita.

Una bola de radio más grande puede ser subconjunto propio de una bola de radio más pequeño

Ejercicio. Construir un ejemplo tal que

$$r_1 > r_2, \qquad B(a_1, r_1) \subsetneq B(a_2, r_2).$$

Una bola de radio más grande puede ser subconjunto propio de una bola de radio más pequeño

Ejercicio. Construir un ejemplo tal que

$$r_1 > r_2, \qquad B(a_1, r_1) \subsetneq B(a_2, r_2).$$

Ejercicio: construir más ejemplos con esta propiedad, para varios espacios métricos.