Bolas abiertas en espacios métricos

Objetivos. Definir bolas en espacios métricos y demostrar sus propiedades elementales.

Requisitos. Distancia, espacios métricos. Para resolver tareas adicionales es necesario conocer bien espacios normados y otros ejemplos de espacios métricos.

1. Definición (bola en un espacio métrico). Sean (X, d) espacio métrico, $a \in X$ y sea $r > 0$. Entonces el siguiente conjunto se llama la *bola abierta* (o simplemente *bola*) con centro a y radio r:

$$B(a, r) \coloneqq \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

2. Definición (bola cerrada en un espacio métrico). Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Entonces el siguiente conjunto se llama la *bola cerrada* con centro a y radio r:

$$\{x \in X : d(a, x) \le r\}.$$

En esta sección vamos a estudiar solamente las bolas abiertas.

Propiedades principales de las bolas abiertas en espacios métricos

En las siguientes proposiciones suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

3. Proposición sobre una bola contenida en otra. Sean $a, b \in X$ y $R, r > 0$ tales que $d(a, b) + r \le R$. Entonces

$$B(b, r) \subseteq B(a, R).$$

Demostración. Sea $x \in B(b, r)$. Entonces

$$d(a, x) \le d(a, b) + d(b, x) < d(a, b) + r \le R,$$

así que $x \in B(a, R)$. □

4. Proposición sobre dos bolas disjuntas. Sean $a_1, a_2 \in X$ y $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 \le d(a_1, a_2)$. Entonces

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset.$$

Demostración. Supongamos que $x \in B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2)$. Entonces

$$d(a_1, a_2) \le d(a_1, x) + d(x, a_2) < r_1 + r_2,$$

lo que contradice a la hipótesis. □

5. Proposición sobre dos bolas concéntricas. Sean $a \in X$ y $r_1, r_2 > 0$. Entonces

$$B(a, r_1) \cap B(a, r_2) = B(a, \min\{r_1, r_2\}).$$

Demostración. Para cualquier $x \in X$, la condición

$$d(a, x) < r_1 \qquad \wedge \qquad d(a, x) < r_2$$

es equivalente a la condición $d(a, x) < \min\{r_1, r_2\}$. □

¿Cuándo dos bolas se intersectan? (ejercicios)

En $\mathbb{R}$ y más general en espacios normados se puede demostrar la proposición recíproca a la Proposición 4 y así obtener un criterio para que dos bolas se intersecten. En espacios métricos generales este criterio no es válido.

6. Proposición sobre dos bolas en $\mathbb{R}$ que se intersectan (ejercicio). Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y sean $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 > d(a_1, a_2)$. Demuestre que

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset.$$

7. Proposición sobre dos bolas en un espacio normado que se intersectan (ejercicio). Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado real o complejo. Dotamos E con la distancia d inducida por la norma $\|\cdot\|$:

$$d(x, y) \coloneqq \|x - y\|.$$

Sean $a_1, a_2 \in E$ y sean $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 > d(a_1, a_2)$. Demuestre que

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) \neq \emptyset.$$

8. Construir un ejemplo con dos bolas que no intersecten aunque sus radios lo permitan (ejercicio). Dé un ejemplo de un espacio métrico que no cumpla con la propiedad anterior. En otras palabras, tiene que indicar un espacio métrico (X, d), puntos $a_1, a_2 \in X$ y radios $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 > d(a_1, a_2)$ y

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset.$$

Ejemplo de una bola de radio más grande que está contenida en una bola de radio más pequeño

9. Consideremos el intervalo cerrado $X = [-3, 3]$ con la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$. Entonces

$$B(0, 4) = [-3, 3], \qquad B(3, 5) = (-1, 3],$$

así que $B(3, 5) \subsetneq B(0, 4)$, aunque $5 > 4$.

10. Otro ejemplo. Consideremos $X = \mathbb{R}$ con la siguiente métrica:

$$d(x, y) \coloneqq \begin{cases} 0, & x = y; \\ |x| + |y|, & x \neq y. \end{cases}$$

Es posible probar que (X, d) es un espacio métrico. Ahora notamos que

$$B(4, 7) = (-3, 3) \cup \{4\}, \qquad B(0, 5) = (-5, 5),$$

así que $B(4, 7) \subsetneq B(0, 5)$, aunque $5 < 7$.