Operadores autoadjuntos

Objetivos. Estudiar propiedades elementales de los operadores autoadjuntos.

Prerrequisitos. El operador adjunto de un operador lineal acotado que actúa en un espacio de Hilbert, las formas sesquilineales y cuadráticas.

1 Definición. Sea H un espacio de Hilbert y sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que A es *autoadjunto* si $A = A^*$.

2 Observación. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces la condición $A = A^*$ es equivalente a la condición que

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

para cualesquiera x, y en H. La última condición es en cierto sentido más constructiva y más fácil de verificar porque no utiliza el operador adjunto.

3 Observación. Si A es autoadjunto, entonces A es normal:

$$A^*A = A^2 = A\,A^*.$$

4 Ejercicio (criterio del operador autoadjunto en términos de la forma sesquilineal asociada)**.** Dado A en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por f_A la forma sesquilineal asociada:

$$f_A(x, y) \coloneqq \langle Ax, y\rangle.$$

Dada una forma sesquilineal acotada g, denotamos por g^* su adjunta:

$$g^*(x, y) \coloneqq \overline{g(y, x)}.$$

Demostrar que

$$A^* = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_A^* = f_A.$$

5 Proposición (criterio del operador autoadjunto en términos de los valores de la forma cuadrática asociada)**.** *Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces A es autoadjunto si, y sólo si, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cada x en H.*

Demostración. 1. Si $A = A^*$, entonces para cada x en H obtenemos que

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}.$$

2. Supongamos que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ para cada x en H. Entonces para cada x en H tenemos

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \langle x, Ax\rangle = \langle A^* x, x\rangle.$$

Usamos la identidad de polarización:

$$\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \langle A(x + \mathrm{i}^k\, y), x + \mathrm{i}^k\, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \langle A^*(x + \mathrm{i}^k\, y), x + \mathrm{i}^k\, y\rangle = \langle A^* x, y\rangle.$$

Luego $A = A^*$. □

6 Observación. Antes ya demostramos una propiedad similar para las formas sesquilineales acotadas. Si $g \in \mathcal{S}(H)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- $g^* = g$;
- $g(x, x) \in \mathbb{R}$ para cada x en H.

La Proposición 5 es un caso particular de este hecho, para $g = f_A$.

7 Proposición (la norma del operador autoadjunto coincide con la norma de su forma cuadrática)**.** *Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que $A = A^*$. Entonces*

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| \le 1}} |\langle Ax, x\rangle|.$$

Demostración. Denotemos el lado derecho por M. Si $\|x\| \le 1$, entonces $|\langle Ax, x\rangle| \le \|A\|$. Por eso $M \le \|A\|$.

Por otro lado, es fácil ver que $|\langle Ax, x\rangle| \le M\|x\|^2$ para cada x en H. Sean $x, y \in H$ con $\|x\| = \|y\| = 1$.

$$\langle A(x + y), x + y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) + \langle Ay, y\rangle.$$

Aplicando esta identidad con $-y$ en lugar de y y restando dos igualdades, obtenemos

$$4\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle) = \langle A(x + y), x + y)\rangle - \langle A(x - y), x - y\rangle.$$

Luego por la ley de paralelogramo

$$4|\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) \le 4M,$$

así que
$$|\operatorname{Re}(\langle Ax, y\rangle)| \le M.$$
Escribimos $\langle Ax, y\rangle$ como $e^{i\theta}\,|\langle Ax, y\rangle|$ y aplicamos la desigualdad anterior con $e^{-i\theta}\,x$ en vez de x. Entonces obtenemos que
$$|\langle Ax, y\rangle| \le M.$$
De aquí se sigue que $\|A\| \le M$. $\square$