La imagen de la función y operaciones aritméticas (un tema del curso “Análisis real”)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

22 de abril de 2021

Objetivos.

- Dadas $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, relacionar los conjuntos

$$(\lambda f)[X], \qquad (f+g)[X], \qquad (fg)[X]$$

con los conjuntos

$$\lambda\, f[X], \qquad f[X]+g[X], \qquad f[X]\, g[X].$$

- Demostrar que las funciones simples $X \to \mathbb{C}$ forman un álgebra.

Prerrequisitos.

- La imagen de una función.
- Operaciones aritméticas con conjuntos.
- Operaciones aritméticas con funciones.

La imagen de una función, repaso
(el conjunto de los valores de una función)

Sea $f\colon X \to Y$ una función.

$$f[X] \;:=$$

La imagen de una función, repaso (el conjunto de los valores de una función)

Sea $f\colon X \to Y$ una función.

$$f[X] \;\coloneqq\; \{y \in Y\colon\; \exists x \in X \quad f(x) = y\}.$$

La imagen de una función, repaso
(el conjunto de los valores de una función)

Sea $f\colon X \to Y$ una función.

$$f[X] \;\coloneqq\; \{y \in Y\colon\; \exists x \in X \quad f(x) = y\}.$$

También se denota por $\operatorname{im}(f)$ o por $\mathcal{R}(f)$.

El producto de un número por un conjunto, repaso

Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $V \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$\lambda V := \left\{ w \in \mathbb{C} : \quad \exists v \in V \quad w = \lambda v \right\}.$$

El producto de un número por un conjunto, repaso

Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $V \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$\lambda V := \{w \in \mathbb{C} : \quad \exists v \in V \quad w = \lambda v\}.$$

Si $\lambda = 0$ y $V \neq \emptyset$, entonces

$$\lambda V =$$

El producto de un número por un conjunto, repaso

Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $V \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$\lambda V := \left\{ w \in \mathbb{C} : \quad \exists v \in V \quad w = \lambda v \right\}.$$

Si $\lambda = 0$ y $V \neq \emptyset$, entonces

$$\lambda V = \{0\}.$$

El producto de un número por un conjunto, repaso

Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $V \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$\lambda V := \left\{ w \in \mathbb{C} : \quad \exists v \in V \quad w = \lambda v \right\}.$$

Si $\lambda = 0$ y $V \neq \emptyset$, entonces

$$\lambda V = \{0\}.$$

Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$\lambda V =$$

El producto de un número por un conjunto, repaso

Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $V \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$\lambda V := \left\{ w \in \mathbb{C}: \quad \exists v \in V \quad w = \lambda v \right\}.$$

Si $\lambda = 0$ y $V \neq \emptyset$, entonces

$$\lambda V = \{0\}.$$

Si $\lambda \neq 0$, entonces

$$\lambda V = \left\{ w \in \mathbb{C}: \quad \frac{w}{\lambda} \in V \right\}.$$

El número de elementos en el producto de un número por un conjunto

Si $\#V = n$, $n \in \mathbb{N}$, y $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces

$$\lambda V =$$

El número de elementos en el producto de un número por un conjunto

Si $\#V = n$, $n \in \mathbb{N}$, y $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces

$$\lambda V = \begin{cases} \{\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n\}, & \lambda \neq 0; \\ \{0\}, & \lambda = 0, \end{cases}$$

y

$$\#(\lambda V) =$$

El número de elementos en el producto de un número por un conjunto

Si $\#V = n$, $n \in \mathbb{N}$, y $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces

$$\lambda V = \begin{cases} \{\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n\}, & \lambda \neq 0; \\ \{0\}, & \lambda = 0, \end{cases}$$

y

$$\#(\lambda V) = \begin{cases} n, & \lambda \neq 0; \\ 1, & \lambda = 0. \end{cases}$$

En ambos casos,

$$\#(\lambda V)$$

El número de elementos en el producto de un número por un conjunto

Si $\#V = n$, $n \in \mathbb{N}$, y $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces

$$\lambda V = \begin{cases} \{\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n\}, & \lambda \neq 0; \\ \{0\}, & \lambda = 0, \end{cases}$$

y

$$\#(\lambda V) = \begin{cases} n, & \lambda \neq 0; \\ 1, & \lambda = 0. \end{cases}$$

En ambos casos,

$$\#(\lambda V) \leq \#V.$$

La imagen del producto de un número por una función

En este tema siempre suponemos que $X \neq \emptyset$,

aunque algunos resultados son válidos también para $X = \emptyset$.

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ *y sea* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Entonces* $(\lambda f)[X] \qquad \lambda f[X]$.

La imagen del producto de un número por una función

En este tema siempre suponemos que $X \neq \emptyset$,
aunque algunos resultados son válidos también para $X = \emptyset$.

Proposición

Sea $f : X \to \mathbb{C}$ *y sea* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Entonces* $\quad (\lambda f)[X] \;=\; \lambda f[X].$

La imagen del producto de un número por una función

En este tema siempre suponemos que $X \neq \emptyset$,
aunque algunos resultados son válidos también para $X = \emptyset$.

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\quad (\lambda f)[X] \;=\; \lambda f[X].$

Demostración para $\lambda = 0$:

$$\lambda f = \qquad\qquad (\lambda f)[X] = \qquad\qquad \lambda\, f[X] =$$

La imagen del producto de un número por una función

En este tema siempre suponemos que $X \neq \emptyset$,
aunque algunos resultados son válidos también para $X = \emptyset$.

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\quad (\lambda f)[X] \;=\; \lambda f[X]$.

Demostración para $\lambda = 0$:

$$\lambda f = \mathbf{0}_X, \qquad (\lambda f)[X] = \qquad\qquad \lambda\, f[X] =$$

La imagen del producto de un número por una función

En este tema siempre suponemos que $X \neq \emptyset$,
aunque algunos resultados son válidos también para $X = \emptyset$.

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\quad (\lambda f)[X] \;=\; \lambda f[X].$

Demostración para $\lambda = 0$:

$$\lambda f = \mathbf{0}_X, \qquad (\lambda f)[X] = \{0\}, \qquad \lambda\, f[X] =$$

La imagen del producto de un número por una función

En este tema siempre suponemos que $X \neq \emptyset$,
aunque algunos resultados son válidos también para $X = \emptyset$.

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ *y sea* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Entonces* $(\lambda f)[X] \;=\; \lambda f[X]$.

Demostración para $\lambda = 0$:

$$\lambda f = \mathbf{0}_X, \qquad (\lambda f)[X] = \{0\}, \qquad \lambda\, f[X] = \{0\}.$$

La imagen del producto de un número por una función

Demostración para $\lambda \neq 0$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces

$$(\lambda f)[X]$$

La imagen del producto de un número por una función

Demostración para $\lambda \neq 0$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces

$$(\lambda f)[X] = \{y \in \mathbb{C}\colon \quad \exists x \in X \quad y = \lambda f(x)\}$$

La imagen del producto de un número por una función

Demostración para $\lambda \neq 0$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
(\lambda f)[X] &= \{y \in \mathbb{C} \colon \quad \exists x \in X \quad y = \lambda f(x)\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{C} \colon \quad \exists x \in X \quad \frac{y}{\lambda} = \lambda f(x)\right\}
\end{aligned}
$$

La imagen del producto de un número por una función

Demostración para $\lambda \neq 0$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\lambda f)[X] &= \{y \in \mathbb{C}\colon \quad \exists x \in X \quad y = \lambda f(x)\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{C}\colon \quad \exists x \in X \quad \frac{y}{\lambda} = \lambda f(x)\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{C}\colon \quad \frac{y}{\lambda} \in f[X]\right\}
\end{aligned}$$

La imagen del producto de un número por una función

Demostración para $\lambda \neq 0$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
(\lambda f)[X] &= \{y \in \mathbb{C}\colon \quad \exists x \in X \quad y = \lambda f(x)\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{C}\colon \quad \exists x \in X \quad \frac{y}{\lambda} = \lambda f(x)\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{C}\colon \quad \frac{y}{\lambda} \in f[X]\right\} \\
&= \lambda\, f[X].
\end{aligned}
$$

La imagen del producto de un número por una función simple

Supongamos que $f : X \to \mathbb{C}$ y el conjunto $f[X]$ es finito:

$$\#(f[X]) = n, \qquad f[X] = \{v_1, \ldots, v_n\},$$

donde $v_1, \ldots, v_n$ son diferentes a pares.

La imagen del producto de un número por una función simple

Supongamos que $f\colon X \to \mathbb{C}$ y el conjunto $f[X]$ es finito:

$$\#(f[X]) = n, \qquad f[X] = \{v_1, \ldots, v_n\},$$

donde $v_1, \ldots, v_n$ son diferentes a pares.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\#((\lambda f)[X]) = \begin{cases} n, & \text{si } \lambda \neq 0; \\ 1, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

En particular, λf es simple.

La suma de dos conjuntos de números, repaso

Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$A + B :=$$

La suma de dos conjuntos de números, repaso

Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$A + B := \left\{ c \in \mathbb{C} : \quad \exists a \in A \quad \exists b \in A \quad c = a + b \right\}.$$

La suma de dos conjuntos de números, repaso

Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$A + B := \Big\{ c \in \mathbb{C} \colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in A \quad c = a + b \Big\}.$$

Ejemplo. $A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{3, 5\}$. Entonces $A + B =$

La suma de dos conjuntos de números, repaso

Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$A + B := \Big\{ c \in \mathbb{C} \colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in A \quad c = a + b \Big\}.$$

Ejemplo. $A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{3, 5\}$. Entonces $A + B = \{4, 6, 7, 9, 11\}$.

La suma de dos conjuntos de números, repaso

Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$A + B := \Big\{ c \in \mathbb{C} \colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in A \quad c = a + b \Big\}.$$

Ejemplo. $A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{3, 5\}$. Entonces $A + B = \{4, 6, 7, 9, 11\}$.

Ejemplo. $A = \{10, 20, 30\}$, $B = \{3, 4\}$. Entonces $A + B =$

La suma de dos conjuntos de números, repaso

Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$A + B := \left\{ c \in \mathbb{C} \colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in A \quad c = a + b \right\}.$$

Ejemplo. $A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{3, 5\}$. Entonces $A + B = \{4, 6, 7, 9, 11\}$.

Ejemplo. $A = \{10, 20, 30\}$, $B = \{3, 4\}$. Entonces $A + B = \{13, 14, 23, 24, 33, 34\}$.

La suma de dos conjuntos de números, repaso

Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$A + B := \Big\{ c \in \mathbb{C} \colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in A \quad c = a + b \Big\}.$$

Ejemplo. $A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{3, 5\}$. Entonces $A + B = \{4, 6, 7, 9, 11\}$.

Ejemplo. $A = \{10, 20, 30\}$, $B = \{3, 4\}$. Entonces $A + B = \{13, 14, 23, 24, 33, 34\}$.

Ejemplo. $A = \{10, 20, 30, 31\}$, $B = \{3, 4\}$. Entonces

$$A + B =$$

La suma de dos conjuntos de números, repaso

Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$A + B := \Big\{ c \in \mathbb{C} \colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in A \quad c = a + b \Big\}.$$

Ejemplo. $A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{3, 5\}$. Entonces $A + B = \{4, 6, 7, 9, 11\}$.

Ejemplo. $A = \{10, 20, 30\}$, $B = \{3, 4\}$. Entonces $A + B = \{13, 14, 23, 24, 33, 34\}$.

Ejemplo. $A = \{10, 20, 30, 31\}$, $B = \{3, 4\}$. Entonces

$$A + B = \{13, 14, 23, 24, 33, 34, 35\}.$$

La suma de dos conjuntos finitos de números, repaso

Supongamos que $\quad A = \{a_1, \ldots, a_m\}, \quad B = \{b_1, \ldots, b_n\}.$

La suma de dos conjuntos finitos de números, repaso

Supongamos que $\quad A = \{a_1, \ldots, a_m\}, \quad B = \{b_1, \ldots, b_n\}.$

Consideremos la función $h\colon \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to A + B$,

$$h(j, k) := a_j + b_k.$$

Esta función

La suma de dos conjuntos finitos de números, repaso

Supongamos que $\quad A = \{a_1, \ldots, a_m\}, \quad B = \{b_1, \ldots, b_n\}.$

Consideremos la función $h\colon \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to A + B$,

$$h(j, k) := a_j + b_k.$$

Esta función es suprayectiva, pero no siempre es inyectiva.

La suma de dos conjuntos finitos de números, repaso

Supongamos que $\quad A = \{a_1, \ldots, a_m\}, \quad B = \{b_1, \ldots, b_n\}.$

Consideremos la función $h\colon \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to A + B$,

$$h(j, k) := a_j + b_k.$$

Esta función es suprayectiva, pero no siempre es inyectiva.

En otras palabras, $a_j + b_k$ puede coincidir con $a_r + b_s$, aunque $(j, k) \neq (r, s)$.

La suma de dos conjuntos finitos de números, repaso

Supongamos que $\quad A = \{a_1, \ldots, a_m\}, \quad B = \{b_1, \ldots, b_n\}$.

Consideremos la función $h\colon \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to A + B$,

$$h(j, k) := a_j + b_k.$$

Esta función es suprayectiva, pero no siempre es inyectiva.

En otras palabras, $a_j + b_k$ puede coincidir con $a_r + b_s$, aunque $(j, k) \neq (r, s)$.

Por eso

$$\#(A + B)$$

La suma de dos conjuntos finitos de números, repaso

Supongamos que $\quad A = \{a_1, \ldots, a_m\}, \quad B = \{b_1, \ldots, b_n\}.$

Consideremos la función $h\colon \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to A + B$,

$$h(j, k) := a_j + b_k.$$

Esta función es suprayectiva, pero no siempre es inyectiva.

En otras palabras, $a_j + b_k$ puede coincidir con $a_r + b_s$, aunque $(j, k) \neq (r, s)$.

Por eso

$$\#(A + B) \leq \#A \cdot \#B.$$

La imagen de la suma de dos funciones, repaso

Proposición

Sean $f, g \colon X \to \mathbb{C}$. Entonces

$$(f + g)[X] \qquad f[X] + g[X].$$

La imagen de la suma de dos funciones, repaso

Proposición

Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$. *Entonces*

$$(f+g)[X] \subseteq f[X] + g[X].$$

La imagen de la suma de dos funciones, repaso

Proposición

Sean $f, g \colon X \to \mathbb{C}$. Entonces

$$(f+g)[X] \ \subseteq \ f[X]+g[X].$$

Demostración. Sea $v \in (f+g)[X]$.

La imagen de la suma de dos funciones, repaso

Proposición

Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$. *Entonces*

$$(f+g)[X] \ \subseteq \ f[X] + g[X].$$

Demostración. Sea $v \in (f+g)[X]$. Elegimos x en X tal que $v = (f+g)(x)$, esto es,

La imagen de la suma de dos funciones, repaso

Proposición

Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$. *Entonces*

$$(f+g)[X] \ \subseteq \ f[X] + g[X].$$

Demostración. Sea $v \in (f+g)[X]$. Elegimos x en X tal que $v = (f+g)(x)$, esto es,

$$v = f(x) + g(x).$$

La imagen de la suma de dos funciones, repaso

Proposición

Sean $f, g \colon X \to \mathbb{C}$. *Entonces*

$$(f+g)[X] \;\subseteq\; f[X]+g[X].$$

Demostración. Sea $v \in (f+g)[X]$. Elegimos x en X tal que $v=(f+g)(x)$, esto es,

$$v = f(x)+g(x).$$

Como $f(x) \in f[X]$, $g(x) \in g[X]$, tenemos $v \in f[X]+g[X]$.

Un ejemplo cuando $(f+g)[X] \neq f[X] + g[X]$

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \cos(x), \qquad g(x) := 5 - \cos(x).$$

Entonces

Un ejemplo cuando $(f+g)[X] \neq f[X] + g[X]$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \cos(x), \qquad g(x) := 5 - \cos(x).$$

Entonces

$$(f+g)[\mathbb{R}] = \{5\}, \qquad f[\mathbb{R}] + g[\mathbb{R}] = [-1,1] + [4,6] = [3,7].$$

La imagen de la suma de dos funciones simples

Sean $f, g \colon X \to \mathbb{C}$ funciones simples,

$$\#(f[X]) = m, \qquad f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \quad v_1, \ldots, v_m \text{ son dif. a pares,}$$

$$\#(g[X]) = n, \qquad g[X] = \{w_1, \ldots, w_n\}, \quad w_1, \ldots, w_n \text{ son dif. a pares.}$$

Entonces

$$(f + g)[X]$$

La imagen de la suma de dos funciones simples

Sean $f, g \colon X \to \mathbb{C}$ funciones simples,

$$\#(f[X]) = m, \qquad f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \quad v_1, \ldots, v_m \text{ son dif. a pares,}$$

$$\#(g[X]) = n, \qquad g[X] = \{w_1, \ldots, w_n\}, \quad w_1, \ldots, w_n \text{ son dif. a pares.}$$

Entonces

$$(f+g)[X] \subseteq f[X] + g[X],$$

y

$$\#((f+g)[X])$$

La imagen de la suma de dos funciones simples

Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ funciones simples,

$$\#(f[X]) = m, \qquad f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \quad v_1, \ldots, v_m \text{ son dif. a pares,}$$

$$\#(g[X]) = n, \qquad g[X] = \{w_1, \ldots, w_n\}, \quad w_1, \ldots, w_n \text{ son dif. a pares.}$$

Entonces

$$(f+g)[X] \subseteq f[X] + g[X],$$

y

$$\#((f+g)[X]) \leq \#(f[X] + g[X])$$

La imagen de la suma de dos funciones simples

Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ funciones simples,

$$\#(f[X]) = m, \qquad f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}, \quad v_1, \ldots, v_m \text{ son dif. a pares,}$$

$$\#(g[X]) = n, \qquad g[X] = \{w_1, \ldots, w_n\}, \quad w_1, \ldots, w_n \text{ son dif. a pares.}$$

Entonces

$$(f + g)[X] \subseteq f[X] + g[X],$$

y

$$\#((f + g)[X]) \leq \#(f[X] + g[X]) \leq mn.$$

En particular, podemos concluir que la función $f + g$ es simple.

El producto de dos conjuntos, el producto de dos funciones

Ejercicio. Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. ¿Cómo se define AB?

El producto de dos conjuntos, el producto de dos funciones

Ejercicio. Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. ¿Cómo se define AB?

Ejercicio. Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$ conjuntos finitos.
¿Como está relacionado $\#(AB)$ con $\#A$ y $\#B$?

El producto de dos conjuntos, el producto de dos funciones

Ejercicio. Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. ¿Cómo se define AB?

Ejercicio. Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$ conjuntos finitos.
¿Como está relacionado $\#(AB)$ con $\#A$ y $\#B$?

Ejercicio. Sean $f, g \colon X \to \mathbb{C}$. ¿Cómo está relacionada la imagen $(fg)[X]$ con $f[X]$ y $g[X]$?

El producto de dos conjuntos, el producto de dos funciones

Ejercicio. Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$. ¿Cómo se define AB?

Ejercicio. Sean $A, B \subseteq \mathbb{C}$ conjuntos finitos.
¿Como está relacionado $\#(AB)$ con $\#A$ y $\#B$?

Ejercicio. Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$. ¿Cómo está relacionada la imagen $(fg)[X]$ con $f[X]$ y $g[X]$?

Ejercicio. Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ funciones simples. ¿Cómo está relacionado $\#((fg)[X])$ con $\#(f[X])$ y $\#(g[X])$?

Las funciones simples forman un álgebra

Sea X un conjunto no vacío.

El conjunto $F := \mathbb{C}^X$ se considera con las siguientes operaciones:

Las funciones simples forman un álgebra

Sea X un conjunto no vacío.

El conjunto $F := \mathbb{C}^X$ se considera con las siguientes operaciones:

- adición, $\quad (f, g) \mapsto f + g, \quad F \times F \to F,$
- multiplicación de escalares por funciones, $\quad (\lambda, f) \mapsto \lambda f, \quad \mathbb{C} \times F \to F,$
- multiplicación, $(f, g) \mapsto fg, \quad F \times F \to F.$

F es un álgebra compleja

Las funciones simples forman un álgebra

Sea X un conjunto no vacío.

El conjunto $F := \mathbb{C}^X$ se considera con las siguientes operaciones:

- adición, $\quad (f, g) \mapsto f + g, \quad F \times F \to F,$
- multiplicación de escalares por funciones, $\quad (\lambda, f) \mapsto \lambda f, \quad \mathbb{C} \times F \to F,$
- multiplicación, $(f, g) \mapsto fg, \quad F \times F \to F.$

F es un álgebra compleja asociativa conmutativa con identidad.

El conjunto $\mathcal{S}(X, \mathbb{C})$ de las funciones simples forma un subálgebra de F.

Una representación generalizada del producto de un escalar por una función simple

Proposición

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función simple dada por su representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{1}_{A_j},$$

y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces λf es simple, y una representación generalizada de λf es

$$\lambda f = \sum_{j=1}^{m} (\lambda v_j) \mathbf{1}_{A_j}.$$

Una representación generalizada del producto de un escalar por una función simple

Proposición

Sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función simple dada por su representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{1}_{A_j},$$

y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces λf es simple, y una representación generalizada de λf es

$$\lambda f = \sum_{j=1}^{m} (\lambda v_j) \mathbf{1}_{A_j}.$$

Demostración: en efecto, $A_1, \ldots, A_m$ es una partición de X.

Una representación generalizada de la suma de dos funciones simples

Proposición

Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ funciones simples dadas por sus representaciones canónicas:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{1}_{A_j}, \qquad g = \sum_{k=1}^{n} w_k \mathbf{1}_{B_k}.$$

Entonces $f + g$ es simple, y una representación generalizada de $f + g$ es

$$f + g = \sum_{(j,k)\in L} (v_j + w_k) \mathbf{1}_{C_{j,k}},$$

donde

$$L := \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}, \qquad C_{j,k} := A_j \cap B_k.$$

Demostración

$$f = f \cdot \mathbf{1}_X =$$

Demostración

$$f = f \cdot \mathbf{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{1}_{A_j} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k} \right) =$$

Demostración

$$f = f \cdot \mathbf{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{1}_{A_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} v_j \, \mathbf{1}_{A_j} \cdot \mathbf{1}_{B_k} =$$

Demostración

$$f = f \cdot \mathbf{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{1}_{A_j} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k} \right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} v_j \, \mathbf{1}_{A_j} \cdot \mathbf{1}_{B_k} = \sum_{(j,k) \in L} v_j \, \mathbf{1}_{C_{j,k}},$$

Demostración

$$f = f \cdot \mathbf{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{1}_{A_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} v_j \, \mathbf{1}_{A_j} \cdot \mathbf{1}_{B_k} = \sum_{(j,k)\in L} v_j \, \mathbf{1}_{C_{j,k}},$$

$$g =$$

Demostración

$$f = f \cdot \mathbf{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{1}_{A_j} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k} \right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} v_j \, \mathbf{1}_{A_j} \cdot \mathbf{1}_{B_k} = \sum_{(j,k)\in L} v_j \, \mathbf{1}_{C_{j,k}},$$

$$g = \sum_{(j,k)\in L} w_k \, \mathbf{1}_{C_{j,k}},$$

Demostración

$$f = f \cdot \mathbf{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{1}_{A_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} v_j \, \mathbf{1}_{A_j} \cdot \mathbf{1}_{B_k} = \sum_{(j,k)\in L} v_j \, \mathbf{1}_{C_{j,k}},$$

$$g = \sum_{(j,k)\in L} w_k \, \mathbf{1}_{C_{j,k}},$$

$$f + g =$$

Demostración

$$f = f \cdot \mathbf{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{1}_{A_j} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k} \right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} v_j \, \mathbf{1}_{A_j} \cdot \mathbf{1}_{B_k} = \sum_{(j,k)\in L} v_j \, \mathbf{1}_{C_{j,k}},$$

$$g = \sum_{(j,k)\in L} w_k \, \mathbf{1}_{C_{j,k}},$$

$$f + g = \sum_{(j,k)\in L} (v_j + w_k) \, \mathbf{1}_{C_{j,k}}.$$

Demostración

$$f = f \cdot \mathbf{1}_X = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j \mathbf{1}_{A_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} v_j\, \mathbf{1}_{A_j} \cdot \mathbf{1}_{B_k} = \sum_{(j,k)\in L} v_j\, \mathbf{1}_{C_{j,k}},$$

$$g = \sum_{(j,k)\in L} w_k\, \mathbf{1}_{C_{j,k}},$$

$$f + g = \sum_{(j,k)\in L} (v_j + w_k)\, \mathbf{1}_{C_{j,k}}.$$

Ya sabemos que $(C_{j,k})_{(j,k)\in L}$ es una partición generalizada.

Por lo tanto, hemos encontrado una representación generalizada de $f + g$.

Idea de otra demostración

Definimos $h\colon X \to \mathbb{C}$,

$$h(x) := \sum_{(j,k)\in L} (v_j + w_k)\mathbf{1}_{C_{j,k}}.$$

Idea de otra demostración

Definimos $h\colon X \to \mathbb{C}$,

$$h(x) := \sum_{(j,k)\in L} (v_j + w_k)\mathbf{1}_{C_{j,k}}.$$

La función h es una función simple dada por una representación generalizada.

Idea de otra demostración

Definimos $h\colon X \to \mathbb{C}$,

$$h(x) := \sum_{(j,k)\in L} (v_j + w_k)\mathbf{1}_{C_{j,k}}.$$

La función h es una función simple dada por una representación generalizada.

Demostremos que $f + g = h$.

Idea de otra demostración

Definimos $h\colon X \to \mathbb{C}$,

$$h(x) := \sum_{(j,k)\in L} (v_j + w_k)\mathbf{1}_{C_{j,k}}.$$

La función h es una función simple dada por una representación generalizada.

Demostremos que $f + g = h$.

Dado x en X, elegimos (p, q) en L tal que $x \in C_{p,q}$. Verificar que

$$(f + g)(x) = v_p + w_q,$$

$$h(x) = v_p + w_q.$$