

Núcleos aproximativos sobre los números reales

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

26 de diciembre de 2024

Objetivos

- Definir el concepto de núcleos aproximativos en \mathbb{R} .
- Conocer un par de ejemplos.
- Demostrar el teorema de aproximación para f en $C_{bu}(\mathbb{R})$.
- Demostrar el teorema de aproximación para f en $L^1(\mathbb{R})$.
- Demostrar la propiedad inyectiva de la transformada de Fourier.

Prerrequisitos

- Propiedades de la integral de Lebesgue.
- El espacio $L^1(\mathbb{R})$.
- Funciones uniformemente continuas, el medidor de continuidad uniforme.
- La integral de Lebesgue y traslaciones.
- Teoremas de Tonelli y Fubini.
- Convolución y sus propiedades básicas.

Plan

- 1 Núcleos aproximativos
- 2 Convolución (repass)
- 3 Continuidad del desplazamiento
- 4 Aproximación en $L^1(\mathbb{R})$
- 5 Inyectividad de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$
- 6 Aproximación uniforme

Núcleo aproximativo: definición

Una familia $(K_t)_{t>0}$ con valores en $L^1(\mathbb{R})$ se llama **núcleo aproximativo**, si

① $\sup_{t>0} \|K_t\|_1 < +\infty$;

② para cada $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} K_t(x) dx = 1;$$

③ para cada $\delta > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(x)| dx = 0.$$

Familia de Dirac: definición

Una familia $(K_t)_{t>0}$ con valores en $L^1(\mathbb{R})$ se llama **familia de Dirac**, si

- ① para cada $t > 0$ y c.t.p. x en \mathbb{R} ,

$$K_t(x) \geq 0;$$

- ② para cada $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} K_t(x) dx = 1;$$

- ③ para cada $\delta > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} K_t(x) dx = 0.$$

Proposición

Sea $(K_t)_{t>0}$ una familia con valores en $L^1(\mathbb{R})$.

Entonces, $(K_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac si, y solo si,

- 1 $(K_t)_{t>0}$ es un núcleo aproximativo,
- 2 $K_t(x) \geq 0$ para cada $t > 0$ y c.t.p. x en \mathbb{R} .

Terminología

En vez de la frase “núcleo aproximativo”, algunos autores prefieren usar otros términos:

- núcleo bueno,
- identidad aproximada,
- aproximación de la identidad.

Se puede trabajar con un conjunto dirigido de índices, en vez de $(0, +\infty)$

De manera más general, podemos suponer que

- J es un conjunto dirigido,
- $(K_t)_{t \in J}$ es una familia (red) en $L^1(\mathbb{R})$,
- $\sup_{t \in J} \|K_t\|_1 < +\infty$,
- $\forall t \in J \quad \int_{\mathbb{R}} K_t \, d\mu = 1$,
- Para cada $\delta > 0$,

$$\lim_{t \in J} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |f| \, d\mu = 0.$$

Una propiedad de funciones Lebesgue integrables

\mathcal{F} := la σ -álgebra de Lebesgue en \mathbb{R} ,

μ := la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

Proposición (repass)

Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-L, L)} |g(y)| \, dy = 0.$$

Repass: la integral de Lebesgue y dilataciones

Proposición (repass)

Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $\alpha > 0$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) \, d\mu(y) = \alpha \int_{\mathbb{R}} f(\alpha x) \, d\mu(x).$$

Repasso: la integral de Lebesgue y dilataciones

Proposición (repasso)

Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $\alpha > 0$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) \, d\mu(y) = \alpha \int_{\mathbb{R}} f(\alpha x) \, d\mu(x).$$

Proposición (repasso)

Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, sea $Y \in \mathcal{F}$ y sea $\alpha > 0$. Entonces,

$$\int_Y f(y) \, d\mu(y) = \alpha \int_{\frac{1}{\alpha}Y} f(\alpha x) \, d\mu(x).$$

Una receta para construir familias de Dirac

Proposición

Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $g(x) \geq 0$ y $\|g\|_1 = 1$. Para cada $t > 0$, pongamos

$$K_t(x) = \frac{1}{t} g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Entonces, $(K_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración

$$\|K_t\|_1 =$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \quad \underline{\underline{x=ty}}$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy =$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1.$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} K_t(x) dx$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} K_t(x) dx =$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} K_t(x) dx = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} g\left(\frac{x}{t}\right) dx$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} K_t(x) dx = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=}$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} K_t(x) dx = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/t, \delta/t)} g(y) dy.$$

Calculemos el límite de esta integral:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/t, \delta/t)} g(y) dy$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} K_t(x) dx = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/t, \delta/t)} g(y) dy.$$

Calculemos el límite de esta integral:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/t, \delta/t)} g(y) dy \stackrel{L=\delta/t}{=}$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} K_t(x) dx = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/t, \delta/t)} g(y) dy.$$

Calculemos el límite de esta integral:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/t, \delta/t)} g(y) dy \stackrel{L=\delta/t}{=} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-L, L)} g(y) dy$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} K_t(x) dx = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/t, \delta/t)} g(y) dy.$$

Calculemos el límite de esta integral:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/t, \delta/t)} g(y) dy \stackrel{L=\delta/t}{=} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-L, L)} g(y) dy \stackrel{g \in L^1(\mathbb{R})}{=}$$

Demostración

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} K_t(x) dx = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} g\left(\frac{x}{t}\right) dx \stackrel{x=ty}{=} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/t, \delta/t)} g(y) dy.$$

Calculemos el límite de esta integral:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/t, \delta/t)} g(y) dy \stackrel{L=\delta/t}{=} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-L, L)} g(y) dy \stackrel{g \in L^1(\mathbb{R})}{=} 0.$$

Ejemplo con la función gaussiana

Proposición

Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) := e^{-\pi x^2}.$$

Para cada $u > 0$, definimos $K_u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$K_u(x) := \frac{1}{u} g\left(\frac{x}{u}\right).$$

Entonces, $(K_u)_{u>0}$ es una familia de Dirac.

Ejemplo con la función gaussiana

Proposición

Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) := e^{-\pi x^2}.$$

Para cada $u > 0$, definimos $K_u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$K_u(x) := \frac{1}{u} g\left(\frac{x}{u}\right).$$

Entonces, $(K_u)_{u>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración.

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u} e^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u} e^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.

Hacemos el cambio de variable

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u} e^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.

Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{4\pi t}$:

$$K_{\sqrt{4\pi t}}(x) =$$

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u} e^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.

Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{4\pi t}$:

$$K_{\sqrt{4\pi t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{\pi x^2}{4\pi t}} =$$

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u} e^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.

Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{4\pi t}$:

$$K_{\sqrt{4\pi t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{\pi x^2}{4\pi t}} = H_t(x).$$

El núcleo de calor (= el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Proposición (el núcleo de Gauss–Weierstrass)

$(H_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Demostración. Ya vimos el ejemplo $K_u(x) = \frac{1}{u} e^{-\frac{\pi x^2}{u^2}}$.

Hacemos el cambio de variable $u = \sqrt{4\pi t}$:

$$K_{\sqrt{4\pi t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{\pi x^2}{4\pi t}} = H_t(x).$$

Cuando $t \rightarrow 0$, obtenemos $u \rightarrow 0$.

El núcleo de Poisson en la recta real

Ejercicio. Sea

$$P_y(x) := \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} \quad (y > 0, x \in \mathbb{R}).$$

Demostrar que $(P_y)_{y>0}$ es una familia de Dirac.

El núcleo de Fejér en la recta real

Ejercicio. Sea

$$\Phi_t(x) := t \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{t}}{\pi x} \right)^2.$$

Demostrar que $(\Phi_t)_{t>0}$ es una familia de Dirac.

Ejercicio. Encontrar un núcleo aproximativo que no sea una familia de Dirac.

Plan

- 1 Núcleos aproximativos
- 2 Convolución (repasso)
- 3 Continuidad del desplazamiento
- 4 Aproximación en $L^1(\mathbb{R})$
- 5 Inyectividad de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$
- 6 Aproximación uniforme

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) \right) d\mu(x)$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) \right) d\mu(x) =$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) \right) d\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) \right) d\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 <$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) \right) d\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) \right) d\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Por lo tanto, $\mu(\mathbb{R} \setminus B) = 0$, donde

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) < +\infty \right\}.$$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) \right) d\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Por lo tanto, $\mu(\mathbb{R} \setminus B) = 0$, donde

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) < +\infty \right\}.$$

Se define $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $(f * g)(x) :=$

Convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) \right) d\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Por lo tanto, $\mu(\mathbb{R} \setminus B) = 0$, donde

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) < +\infty \right\}.$$

Se define $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $(f * g)(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) d\mu(y), & x \in B, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus B. \end{cases}$

Propiedades de la convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$.
- Propiedad lineal respecto a cada uno de los argumentos.

Propiedades de la convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$.
- Propiedad lineal respecto a cada uno de los argumentos.
- Propiedad asociativa.

Propiedades de la convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$.
- Propiedad lineal respecto a cada uno de los argumentos.
- Propiedad asociativa.
- Propiedad conmutativa.

Propiedades de la convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$.
- Propiedad lineal respecto a cada uno de los argumentos.
- Propiedad asociativa.
- Propiedad conmutativa.
- Si $f \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$, $u \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} v$, entonces $f * u \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g * v$.

Propiedades de la convolución de funciones de clase $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

- $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$.
- Propiedad lineal respecto a cada uno de los argumentos.
- Propiedad asociativa.
- Propiedad conmutativa.
- Si $f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} g$, $u \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} v$, entonces $f * u \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} g * v$.

Debido a la última propiedad, podemos considerar $*$ como una operación en $L^1(\mathbb{R})$.

Convolución $f * g$ para $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

Sean $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Entonces, para cada x en \mathbb{R} ,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) < +\infty.$$

Convolución $f * g$ para $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

Sean $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Entonces, para cada x en \mathbb{R} ,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) < +\infty.$$

Se define $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) d\mu(y).$$

Convolución $f * g$ para $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

Sean $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Entonces, para cada x en \mathbb{R} ,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)| d\mu(y) < +\infty.$$

Se define $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) d\mu(y).$$

Entonces, $f * g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ y

$$\mathcal{N}_\infty(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_\infty(g).$$

Plan

- 1 Núcleos aproximativos
- 2 Convolución (repass)
- 3 Continuidad del desplazamiento**
- 4 Aproximación en $L^1(\mathbb{R})$
- 5 Inyectividad de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$
- 6 Aproximación uniforme

Desplazamientos de una función

Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y sea $h \in \mathbb{R}$.

Denotemos por $\tau_h f$ a la función

$$(\tau_h f)(x) := f(x - h).$$

Ejercicio. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $h \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\tau_h f \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\|\tau_h f\|_1 = \|f\|_1.$$

Continuidad del desplazamiento en $C_c(\mathbb{R})$

Proposición

Sea $f \in C_c(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_{\text{sup}} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0.$$

Demostración, inicio

Para cada h en \mathbb{R} y cada x en \mathbb{R} ,

$$|f(x - h) - f(x)| \leq$$

Demostración, inicio

Para cada h en \mathbb{R} y cada x en \mathbb{R} ,

$$|f(x-h) - f(x)| \leq \omega_f(|h|).$$

Por lo tanto,

$$\|\tau_h f - f\|_{\text{sup}} \leq \omega_f(|h|),$$

Como f es uniformemente continua, esta expresión tiende a 0 cuando $h \rightarrow 0$.

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \quad f(x) = 0.$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \quad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \quad f(x - h) = 0.$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \quad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \quad f(x - h) = 0.$$

Luego

$$\|\tau_h f - f\|_1 =$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \quad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \quad f(x - h) = 0.$$

Luego

$$\|\tau_h f - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x - h) - f(x)| \, dx =$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \quad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \quad f(x - h) = 0.$$

Luego

$$\|\tau_h f - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x - h) - f(x)| dx = \int_{(-L, L)} |f(x - h) - f(x)| dx \leq$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \quad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \quad f(x - h) = 0.$$

Luego

$$\|\tau_h f - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x - h) - f(x)| \, dx = \int_{(-L, L)} |f(x - h) - f(x)| \, dx \leq 2L \omega_f(|h|).$$

Demostración, final

Sea $L > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \quad f(x) = 0.$$

Si $h \in \mathbb{R}$ y $|h| < L$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-2L, 2L) \quad f(x - h) = 0.$$

Luego

$$\|\tau_h f - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x - h) - f(x)| dx = \int_{(-L, L)} |f(x - h) - f(x)| dx \leq 2L \omega_f(|h|).$$

Como f es uniformemente continua, la última expresión tiende a 0 cuando $h \rightarrow 0$.

Continuidad del desplazamiento en $L^1(\mathbb{R})$

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$,

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 <$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior,

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$ se cumple

$$\|g - \tau_h g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$ se cumple

$$\|g - \tau_h g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para cada h en $(-\delta, \delta)$ obtenemos

$$\|\tau_h f - f\|_1 \leq$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$ se cumple

$$\|g - \tau_h g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para cada h en $(-\delta, \delta)$ obtenemos

$$\|\tau_h f - f\|_1 \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_1 + \|\tau_h g - g\|_1 + \|g - f\|_1$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$ se cumple

$$\|g - \tau_h g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para cada h en $(-\delta, \delta)$ obtenemos

$$\|\tau_h f - f\|_1 \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_1 + \|\tau_h g - g\|_1 + \|g - f\|_1 <$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que $\forall h \in (-\delta, \delta)$ se cumple

$$\|g - \tau_h g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para cada h en $(-\delta, \delta)$ obtenemos

$$\|\tau_h f - f\|_1 \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_1 + \|\tau_h g - g\|_1 + \|g - f\|_1 < \varepsilon.$$

Convolución en términos de la función desplazada

Ejercicio. Mostrar que

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} (\tau_y f)(x) g(y) dy,$$

cuando la convolución está bien definida.

Continuidad del desplazamiento en $L^p(\mathbb{R})$

Ejercicio. Sean $1 \leq p < +\infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$. Demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$

Continuidad de la convolución $f * g$ con $f \in L^1$, $g \in L^\infty$

Ejercicio. Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Demostrar que $f * g \in C_{bu}(\mathbb{R})$.

Plan

- 1 Núcleos aproximativos
- 2 Convolución (repass)
- 3 Continuidad del desplazamiento
- 4 Aproximación en $L^1(\mathbb{R})$**
- 5 Inyectividad de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$
- 6 Aproximación uniforme

Aproximación en $L^1(\mathbb{R})$

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f * K_t - f\|_1 = 0.$$

Demostración, inicio

Notamos que

$$|(f * K_t)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| |(\tau_y f)(x) - f(x)| dy.$$

Integramos sobre x e intercambiamos las integrales usando el teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned} \|f * K_t - f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| |(\tau_y f)(x) - f(x)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| |(\tau_y f)(x) - f(x)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| \|\tau_y f - f\|_1 dy. \end{aligned}$$

Demostración, continuación

$$\|f * K_t - f\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| \|\tau_y f - f\|_1 dy.$$

Para cada $\delta > 0$ dividimos la última integral en dos partes:

$$\begin{aligned} \|f * K_t - f\|_1 &\leq \int_{(-\delta, \delta)} |K_t(y)| \|\tau_y f - f\|_1 dy + \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| \|\tau_y f - f\|_1 dy \\ &\leq \sup_{t>0} \|K_t\|_1 \cdot \sup_{y \in (-\delta, \delta)} \|\tau_y f - f\|_1 + 2\|f\|_1 \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy. \end{aligned}$$

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$.

Usando el hecho que $\|\tau_h f - f\|_1 \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y \in (-\delta, \delta)} \|\tau_y f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2 \sup_{t > 0} \|K_t\|_1}.$$

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$.

Usando el hecho que $\|\tau_h f - f\|_1 \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y \in (-\delta, \delta)} \|\tau_y f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2 \sup_{t > 0} \|K_t\|_1}.$$

Aplicando la definición del núcleo aproximativo, encontramos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_1 + 1}.$$

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$.

Usando el hecho que $\|\tau_h f - f\|_1 \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y \in (-\delta, \delta)} \|\tau_y f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2 \sup_{t > 0} \|K_t\|_1}.$$

Aplicando la definición del núcleo aproximativo, encontramos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_1 + 1}.$$

Para cada t en $(0, t_0)$, obtenemos $\|f * K_t - f\|_1 < \varepsilon$.

Plan

- 1 Núcleos aproximativos
- 2 Convolución (repass)
- 3 Continuidad del desplazamiento
- 4 Aproximación en $L^1(\mathbb{R})$
- 5 Inyectividad de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$
- 6 Aproximación uniforme

Convolución con el núcleo de calor, repaso

Proposición

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, para cada $t > 0$ y cada x en \mathbb{R} ,

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} = 0$. Entonces, $f = 0$ c.t.p.

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} = 0$. Entonces, $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en \mathbb{R} , obtenemos

$$(f * H_t)(x) =$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces, $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en \mathbb{R} , obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces, $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en \mathbb{R} , obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi =$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces, $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en \mathbb{R} , obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = 0.$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces, $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en \mathbb{R} , obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = 0.$$

Luego,

$$\|f\|_1 \leq \|f - f * H_t\|_1 + \|f * H_t\|_1 = \|f - f * H_t\|_1.$$

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces, $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en \mathbb{R} , obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = 0.$$

Luego,

$$\|f\|_1 \leq \|f - f * H_t\|_1 + \|f * H_t\|_1 = \|f - f * H_t\|_1.$$

Pasamos al límite cuando $t \rightarrow 0^+$ y obtenemos

La propiedad inyectiva de la transformada de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces, $f = 0$ c.t.p.

Demostración. Para cada $t > 0$ y cada x en \mathbb{R} , obtenemos

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = 0.$$

Luego,

$$\|f\|_1 \leq \|f - f * H_t\|_1 + \|f * H_t\|_1 = \|f - f * H_t\|_1.$$

Pasamos al límite cuando $t \rightarrow 0^+$ y obtenemos $\|f\|_1 = 0$.

Plan

- 1 Núcleos aproximativos
- 2 Convolución (repaso)
- 3 Continuidad del desplazamiento
- 4 Aproximación en $L^1(\mathbb{R})$
- 5 Inyectividad de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$
- 6 Aproximación uniforme**

Repaso: el medidor de continuidad uniforme

(en la terminología antigua, el “módulo de continuidad uniforme”)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos $\omega_f: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$,

$$\omega_f(\delta) := \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \right\}.$$

Repaso: el medidor de continuidad uniforme

(en la terminología antigua, el “módulo de continuidad uniforme”)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos $\omega_f: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$,

$$\omega_f(\delta) := \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \right\}.$$

Ejercicio. Demostrar que ω_f es una función decreciente.

Repaso: el medidor de continuidad uniforme

(en la terminología antigua, el “módulo de continuidad uniforme”)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos $\omega_f: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$,

$$\omega_f(\delta) := \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \right\}.$$

Ejercicio. Demostrar que ω_f es una función decreciente.

Ejercicio. Demostrar que f es uniformemente continua $\iff \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

Aproximación uniforme con los núcleos aproximativos

$C_{bu}(\mathbb{R}) :=$ el espacio de las funciones acotadas y uniformemente continuas.

Teorema

Sea $f \in C_{bu}(\mathbb{R})$ y sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|f * K_t - f\|_{\text{sup}} = 0.$$

Demostración, inicio

Sea

$$M := \sup_{t>0} \|K_t\|_1.$$

Sabemos que $M < +\infty$. Además, sabemos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0.$$

Para cada $t > 0$ y cada $x \in \mathbb{R}$,

$$|(f * K_t)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| |f(x-y) - f(x)| dy.$$

Demostración, continuación

Para cada $\delta > 0$, dividimos la integral en dos partes.

$$\begin{aligned} |(f * K_t)(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\leq \int_{(-\delta, \delta)} |f(x-y) - f(x)| |K_t(y)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |f(x-y) - f(y)| |K_t(y)| dy \\ &\leq \omega_f(\delta)M + 2\|f\|_{\sup} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy. \end{aligned}$$

Hemos mostrado que

$$\|f * K_t - f\|_{\text{sup}} \leq \omega_f(\delta)M + 2\|f\|_{\text{sup}} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| \, dy.$$

Hemos mostrado que

$$\|f * K_t - f\|_{\text{sup}} \leq \omega_f(\delta)M + 2\|f\|_{\text{sup}} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$,

Hemos mostrado que

$$\|f * K_t - f\|_{\text{sup}} \leq \omega_f(\delta)M + 2\|f\|_{\text{sup}} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que

$$\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Hemos mostrado que

$$\|f * K_t - f\|_{\text{sup}} \leq \omega_f(\delta)M + 2\|f\|_{\text{sup}} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que

$$\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Luego elegimos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{\text{sup}} + 1}.$$

Hemos mostrado que

$$\|f * K_t - f\|_{\text{sup}} \leq \omega_f(\delta)M + 2\|f\|_{\text{sup}} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que

$$\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Luego elegimos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_{\text{sup}} + 1}.$$

Entonces para cada t en $(0, t_0)$ obtenemos $\|f * K_t - f\|_{\text{sup}} < \varepsilon$.

Aproximación en un punto

Ejercicio.

Sea $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Supongamos que f es continua en x .

Sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (K_t * f)(x) = f(x).$$