Aproximación de la función identidad por funciones simples (un tema de análisis real)

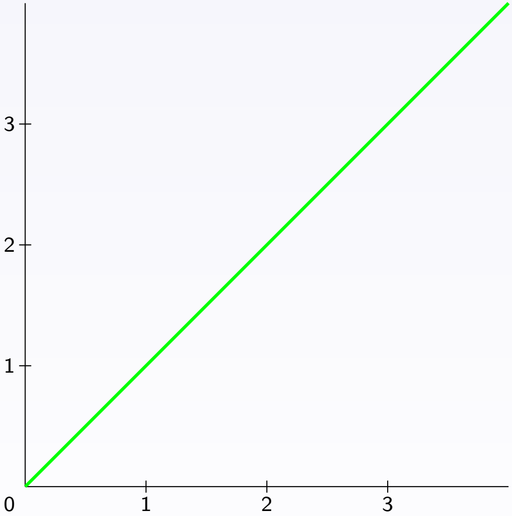
Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

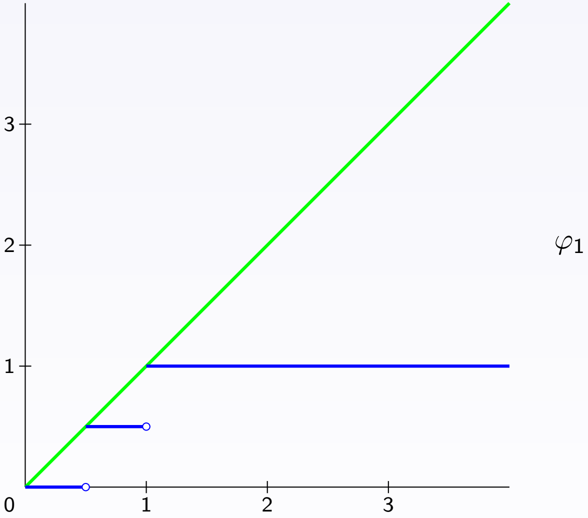
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

9 de abril de 2024

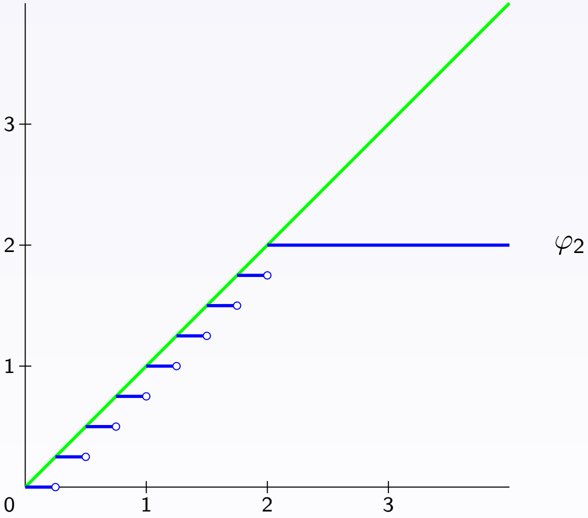
Objetivo: aproximar la función identidad, definida en $[0, +\infty]$, por funciones simples.



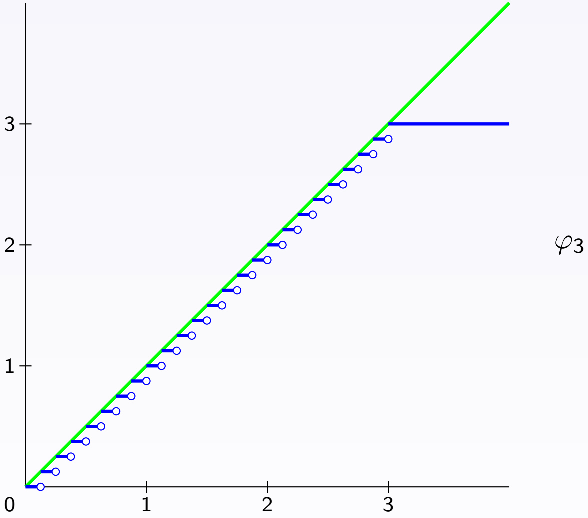
Objetivo: aproximar la función identidad, definida en $[0, +\infty]$, por funciones simples.



Objetivo: aproximar la función identidad, definida en $[0, +\infty]$, por funciones simples.



Objetivo: aproximar la función identidad, definida en $[0, +\infty]$, por funciones simples.



Teorema

Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos $\varphi_n\colon [0,+\infty] \to [0,+\infty)$ mediante la regla

$$\varphi_n(t) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}, & 0 \le t < n; \\ n, & t \ge n. \end{cases}$$

Entonces,

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi_n$ es simple y medible;
2. $\forall t \in [0,+\infty] \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = t;$
3. $\forall t \in [0,+\infty] \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi_n(t) \le \varphi_{n+1}(t).$

Propiedades 2 y 3 de manera breve: para cada t en $[0,+\infty]$, $\quad \varphi_n(t) \nearrow t.$

Repaso: la parte entera de números reales (el redondeo hacia abajo)

Para demostrar el teorema, necesitamos repasar varios conceptos.

Para cada x en $\mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor := \max\Big\{ k \in \mathbb{Z} \colon \ k \le x \Big\}.$$

Para cada x en $\mathbb{R}$ y cada m en $\mathbb{Z}$,

$$\lfloor x \rfloor = m \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \le x < m + 1.$$

Otra forma de la misma propiedad:

$$\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Ejemplo: $\lfloor \pi \rfloor = 3, \quad 3 \le \pi < 4.$

Repaso: la parte entera y la multiplicación por un número natural

Proposición. Para cada x en $\mathbb{R}$ y cada m en $\mathbb{N}$,

$$m\lfloor x\rfloor \le \lfloor mx\rfloor.$$

Demostración. Se cumple $\lfloor x\rfloor \le x$, luego

$$m\lfloor x\rfloor \le mx.$$

Esto significa que $m\lfloor x\rfloor$ pertenece al conjunto $\{k\in\mathbb{Z}\colon\ k\le mx\}$.

Pero $\lfloor mx\rfloor$ es el elemento máximo de este conjunto. $\square$

Ejemplos. $2\lfloor\pi\rfloor = \lfloor 2\pi\rfloor,\quad 2\lfloor\sqrt{3}\rfloor < \lfloor 2\sqrt{3}\rfloor.$

Queremos entender la definición de φ_1

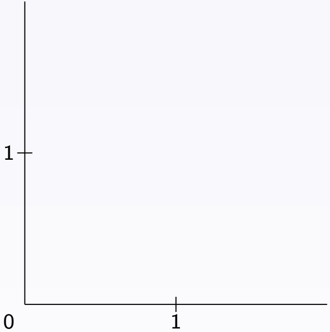
$$\varphi_1(t) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2t \rfloor}{2}, & 0 \le t < 1, \\ 1, & t \ge 1. \end{cases}$$

Consideremos el caso $0 \le t < 1$.

La condición $0 \le t < 1$ implica que $0 \le 2t < 2$ y $\lfloor 2t \rfloor \in \{0, 1\}$.

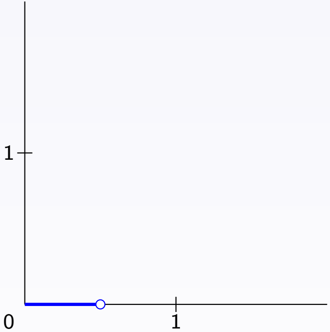
$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = 0 \quad &\Longleftarrow \quad \lfloor 2t \rfloor = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le 2t < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le t < \frac{1}{2}, \\ \varphi_1(t) = \frac{1}{2} \quad &\Longleftarrow \quad \lfloor 2t \rfloor = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \le 2t < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} \le t < 1. \end{aligned}$$

Grafiquemos φ_1



$$\varphi_1(t) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2t \rfloor}{2}, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

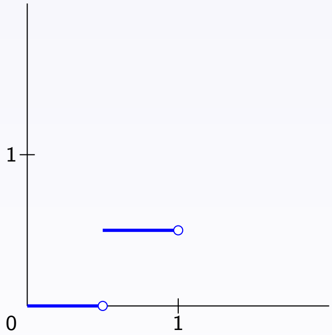
Grafiquemos φ_1



$$\varphi_1(t) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2t \rfloor}{2}, & 0 \le t < 1, \\ 1, & t \ge 1. \end{cases}$$

$$0 \le t < \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1(t) = 0,$$

Grafiquemos φ_1

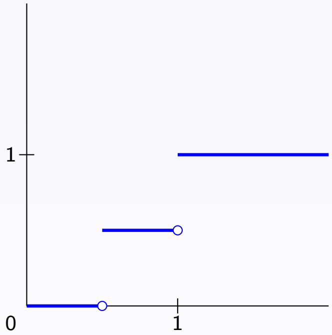


$$\varphi_1(t) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2t \rfloor}{2}, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

$$0 \leq t < \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1(t) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \leq t < 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{2},$$

Grafiquemos φ_1



$$\varphi_1(t) := \begin{cases} \frac{\lfloor 2t \rfloor}{2}, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

$$0 \leq t < \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1(t) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \leq t < 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{2},$$

$$t \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1(t) = 1.$$

Ejercicios

Para entender la demostración del teorema (escrita a continuación), recomiendo hacer varios ejercicios.

Ejercicio. Copiar la definición de φ_n en papel.

Ejercicio. Calcular a mano $\varphi_n(t)$ para $t = \frac{51}{16}$ y $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Ejercicio. Para entender la definición de φ_2, considerar los siguientes 9 casos:

$$\frac{k}{4} \le t < \frac{k+1}{4} \qquad (0 \le k \le 7), \qquad t \ge 2.$$

Calcular $\varphi_2(t)$ en cada uno de estos casos.
Luego graficar la función φ_2.

Ejercicios

Ejercicio de programación. En algún sistema de álgebra computacional (por ejemplo, en Sagemath o Python+NumPy o GNU Octave),

- programar las funciones φ_1, φ_2, φ_3,
- generar 100 puntos pseudoaleatorios en $[0, 5]$,
- calcular φ_1, φ_2, φ_3 en estos puntos,
- mostrar las gráficas discretas correspondientes.

Demostración: φ_n es simple y medible

φ_n toma valores de la forma

$$v_k = \frac{k}{2^n}, \qquad 0 \leq k \leq n \cdot 2^n.$$

La cantidad de estos valores es $n \cdot 2^n + 1$.

Para cada k en $\mathbb{Z}$ con $0 \leq k < n \cdot 2^n$,

$$A_k = \varphi_n^{-1}\left[\{v_k\}\right] = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right).$$

Para $k = n \cdot 2^n$,

$$A_{n \cdot 2^n} = \varphi_n^{-1}[\{n\}] = [n, +\infty].$$

El conjunto de los valores de ϕ_n es finito, y los conjuntos A_k son medibles.

Demostración: $\varphi_n(t) \to t$, el caso $t = +\infty$

Recordemos la definición de φ_n:

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}, & 0 \leq t < n; \\ n, & t \geq n. \end{cases}$$

Si $t = +\infty$, entonces para cada n aplicamos el segundo caso de la definición:

$$\varphi_n(+\infty) = n.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(+\infty) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Inicio de la demostración: $\varphi_n(t) \to t$, el caso $0 \le t < +\infty$

Fijamos t, $0 \le t < +\infty$.

Para encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, es suficiente trabajar con n grandes.

Supongamos $n > t$. Entonces se aplica el primer caso de la definición de φ_n:

$$\varphi_n(t) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}, & 0 \le t < n; \\ n, & t \ge n. \end{cases}$$

Continuación de la demostración: $\varphi_n(t) \to t$, el caso $0 \le t < +\infty$

Suponemos $0 \le t < +\infty$, $n > t$. Entonces $\varphi_n(t) = \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}$.

Por la definición de $\lfloor \ \rfloor$,

$$\lfloor 2^n t \rfloor \le 2^n t, \qquad 2^n t < \lfloor 2^n t \rfloor + 1.$$

Despejamos $\lfloor 2^n t \rfloor$ de estas desigualdades, luego dividimos entre 2^n:

$$2^n t - 1 < \lfloor 2^n t \rfloor, \qquad \lfloor 2^n \rfloor \le 2^n t.$$

$$t - \frac{1}{2^n} < \varphi_n(t) \le t.$$

Aplicamos el teorema de compresión (el teorema de sándwich):

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = t.$$

Inicio de la demostración $\varphi_n(t) \le \varphi_{n+1}(t)$, división en tres casos

Las funciones φ_n y φ_{n+1} se definen por casos:

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}, & 0 \le t < n; \\ n, & t \ge n; \end{cases} \qquad \varphi_{n+1}(t) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2^{n+1} t \rfloor}{2^{n+1}}, & 0 \le t < n+1; \\ n+1, & t \ge n+1. \end{cases}$$

Hay que considerar tres casos.

- $t \ge n+1$,
- $n \le t < n+1$,
- $0 \le t < n$.

Demostración: $\varphi_n(t) \le \varphi_{n+1}(t)$, caso $t \ge n+1$

Supongamos que $n+1 \le t \le +\infty$.

Entonces en las definiciones de φ_n y φ_{n+1} se aplica el segundo caso:

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}, & 0 \le t < n; \\ n, & t \ge n; \end{cases} \qquad \varphi_{n+1}(t) := \begin{cases} \frac{\lfloor 2^{n+1} t \rfloor}{2^{n+1}}, & 0 \le t < n+1; \\ n+1, & t \ge n+1. \end{cases}$$

En este caso es muy fácil comparar $\varphi_n(t)$ con $\varphi_{n+1}(t)$:

$$\varphi_n(t) = n < n+1 = \varphi_{n+1}(t).$$

Demostración: $\varphi_n(t) \le \varphi_{n+1}(t)$, caso $n \le t < n+1$

Supongamos que $n \le t < n+1$.

Entonces la definición de φ_n se aplica el segundo caso, y en la definición de φ_{n+1} el primero:

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}, & 0 \le t < n; \\ n, & t \ge n; \end{cases} \qquad \varphi_{n+1}(t) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2^{n+1} t \rfloor}{2^{n+1}}, & 0 \le t < n+1; \\ n+1, & t \ge n+1. \end{cases}$$

Notamos que

$$\lfloor 2^{n+1}\, t \rfloor \ge 2^{n+1} \lfloor t \rfloor \ge 2^{n+1}\, n.$$

Estamos listos para comparar $\varphi_{n+1}(t)$ con $\varphi_n(t)$:

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{\lfloor 2^{n+1}\, t \rfloor}{2^{n+1}} \ge \frac{2^{n+1}\, n}{2^{n+1}} = n = \varphi_n(t).$$

Demostración: $\varphi_n(t) \le \varphi_{n+1}(t)$, caso $0 \le t < n$

Supongamos que $0 \le t < n$.

Entonces en las definiciones de φ_n y de φ_{n+1} se aplica el primer caso:

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \frac{\lfloor 2^n\, t \rfloor}{2^n}, & 0 \le t < n; \\ n, & t \ge n; \end{cases} \qquad \varphi_{n+1}(t) := \begin{cases} \frac{\lfloor 2^{n+1}\, t \rfloor}{2^{n+1}}, & 0 \le t < n+1; \\ n+1, & t \ge n+1. \end{cases}$$

Comparamos $\varphi_{n+1}(t)$ con $\varphi_n(t)$ usando la regla $\lfloor 2x \rfloor \ge 2\lfloor x \rfloor$:

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{\lfloor 2^{n+1}\, t \rfloor}{2^{n+1}} = \frac{\lfloor 2 \cdot 2^n\, t \rfloor}{2^{n+1}} \ge \frac{2\,\lfloor 2^n\, t \rfloor}{2^{n+1}} = \frac{\lfloor 2^n\, t \rfloor}{2^n} = \varphi_n(t).$$

Problemas

Problema. Consideremos otra sucesión de funciones, más simple:

$$\psi_n(t) := \begin{cases} \dfrac{\lfloor nt \rfloor}{n}, & 0 \le t < n, \\ n, & t \ge n. \end{cases}$$

¿Se cumplen las afirmaciones del teorema para esta sucesión?

Hay que justificar bien la respuesta.

Cada función positiva medible es el límite de una sucesión creciente de funciones simples medibles positivas

Corolario del teorema

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Entonces existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

- para cada n en $\mathbb{N}$, $\quad g_n \colon X \to [0, +\infty)$, $\quad g_n$ es simple y medible,
- para cada x en X, $\quad (g_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \nearrow f(x)$.

Cada función positiva medible es el límite de una sucesión creciente de funciones simples medibles positivas

Corolario del teorema

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Entonces existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

- para cada n en $\mathbb{N}$, $\quad g_n \colon X \to [0, +\infty)$, $\quad g_n$ es simple y medible,
- para cada x en X, $\quad (g_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \nearrow f(x)$.

Idea de demostración.

Cada función positiva medible es el límite de una sucesión creciente de funciones simples medibles positivas

Corolario del teorema

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Entonces existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

- para cada n en $\mathbb{N}$, $g_n \colon X \to [0, +\infty)$, g_n es simple y medible,
- para cada x en X, $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \nearrow f(x)$.

Idea de demostración.

$$g_n := \varphi_n \circ f.$$

Cada función positiva medible es el límite de una sucesión creciente de funciones simples medibles positivas

Corolario del teorema

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.
Entonces existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

- para cada n en $\mathbb{N}$, $\quad g_n \colon X \to [0, +\infty)$, $\quad g_n$ es simple y medible,
- para cada x en X, $\quad (g_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \nearrow f(x)$.

Idea de demostración.

$$g_n := \varphi_n \circ f.$$

Ejercicio. Completar la demostración.