Aproximación de la transformada de Fourier sobre $\mathbb{R}$ por la transformada finita de Fourier

Agradezco a Gerardo Ramos Vázquez, Gamaliel Yafte Téllez Sánchez y Yesenia Bravo Ortega por pensar juntos en este tema y encontrar varias aproximaciones similares a la que escribo en estos apuntes.

Objetivos. Mostrar cómo aproximar la transformada de Fourier $\widehat{f}$ de una función f por la transformada finita de Fourier de un vector formado por los valores de f en ciertos puntos equidistantes.

Requisitos. Definición de la transformada de Fourier $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, definición de la transformada finita de Fourier $\mathcal{F}_n$, la regla compuesta de rectángulos izquierdos.

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable y continua. Recordemos que su transformada de Fourier $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se define mediante la regla

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

En este tema supongamos que f es bastante suave (al menos continuamente derivable) y decae rápidamente en infinito, así que la integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

tiende rápidamente a cero cuando L tiende a infinito.

Para simplificar las siguientes fórmulas, suponemos que m es un número entero positivo par, ponemos $n = m^2$ y denotamos por $x_0, \ldots, x_{n-1}$ a los siguientes puntos reales que nos servirán como nodos en el dominio de f:

$$x_k = -\frac{m}{2} + \frac{km}{n} = -\frac{m}{2} + \frac{k}{m} \qquad (k \in \{0, \ldots, n-1\}).$$

En el dominio de la función $\widehat{f}$ trabajamos con los mismos nodos, pero en este caso los denotamos por ξ_j:

$$\xi_j = -\frac{m}{2} + \frac{jm}{n} = -\frac{m}{2} + \frac{j}{m} \qquad (j \in \{0, \ldots, n-1\}).$$

Primero aproximamos la integral (1) por la integral sobre $[-m/2, m/2]$:

$$\widehat{f}(\xi) \approx \int\limits_{-m/2}^{m/2} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Luego aproximamos la integral sobre el segmento $[-m/2, m/2]$ por una suma integral de Riemann. Trabajamos con la partición

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad x_n \coloneqq \frac{m}{2},$$

y en cada subsegmento $[x_k, x_{k+1}]$ evaluamos la función en el extremo izquierdo x_k. Entonces la longitud de cada subsegmento es $\frac{1}{m}$, y la función se evalúa en los puntos $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Denotamos esta suma integral por $S_{f,\xi,m}$:

$$S_{f,\xi,m} \coloneqq \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x_k}\,.$$

Finalmente, ponemos ξ_j en lugar de ξ:

$$S_{f,\xi_j,m} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi_j x_k}\,.$$

Expresamos $-2\pi\xi_j x_k$ en términos de j, k, m, n:

$$-2\pi\xi_j x_k = -2\pi \left(-\frac{m}{2} + \frac{j}{m}\right)\left(-\frac{m}{2} + \frac{k}{m}\right) = -\frac{\pi m^2}{2} + \pi k + \pi j - \frac{2\pi jk}{n}.$$

Como m es par, el número $-\pi m^2/2$ es un múltiplo de 2π. Por eso

$$\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi_j x_k} = \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi m^2}{2}}}_{1}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi j}\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,jk}{n}} = (-1)^k (-1)^j \omega_n^{jk}.$$

Luego

$$S_{f,\xi_j,m} = \frac{(-1)^j}{m} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f(x_k) \omega_n^{jk}.$$

Denotemos por u_k al número $(-1)^k f(x_k)$. En otras palabras, pongamos

$$u \coloneqq \big[(-1)^k\big]_{k=0}^{n-1} \odot \big[f(x_k)\big]_{k=0}^{n-1},$$

donde $\odot$ es la multiplicación de vectores por componentes. Entonces

$$S_{f,\xi_j,m} = \frac{(-1)^j}{m} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \omega_n^{jk} = \frac{(-1)^j}{m} (\mathcal{F}_n u)_j.$$

Hemos logrado expresar el arreglo de los números $S_{f,\xi_j,m}$ a través de la transformada finita de Fourier del vector u:

$$v_j \coloneqq \big[S_{f,\xi_j,m}\big]_{j=0}^{n-1} = \frac{1}{m} \big[(-1)^j\big]_{j=0}^{n-1} \odot (\mathcal{F}_n u).$$

Por supuesto, en vez de ξ_j y v_j sería más preciso escribir $\xi_j^{(m)}$ y $v_j^{(m)}$, respectivamente. Denotemos por ε_m el error máximo de la aproximación:

$$\varepsilon_m \coloneqq \max_{0 \le j \le n-1} |v_j^{(m)} - \widehat{f}(\xi_j^{(m)})|.$$

Una pequeña tarea adicional: encontrar una cota superior para ε_m. La respuesta puede ser en términos de los supremos de $|f'|$ o de $|f''|$ y de las integrales $\int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Programación

Escribamos un programa en GNU Octave. Los datos iniciales son una función f y un número natural m. Programa regresará dos arreglos de longitud $n = m^2$: los puntos $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ y números $v_0, \ldots, v_{n-1}$ que aproximan los valores de $\widehat{f}$ en los puntos $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$. Se recomienda completar el siguiente código.

```
function [xi, v] = approx_fourier_transform(f, m),
   n = m * m;
   ind = (0 : n - 1)';
   x = (ind / m) + (- m / 2) * ones(n, 1);
   xi = x;
   minusones = - ones(n, 1);
   signs = minusones .^ ???;
   fvalues = f(???);
   u = fvalues .* ???;
   v = (fft(???) .* ???) / m;
end
```

Para la comprobación usamos la función gaussiana $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$. Ya sabemos que la transformada de Fourier de esta función coincide con ella misma: $\widehat{f} = f$.

```
function [maxerror] = test_approx_fourier_transform_gaussian(m),
   f = @ (x) exp(???);
   [xi, v] = approx_fourier_transform(f, m);
   ffourier = f;
   w = ffourier(???);
   maxerror = norm(v - w, inf);
end
```

Se recomienda probar con experimentos numéricos que en este ejemplo el error

$$\varepsilon_m := \max_{0 \le j \le m^2-1} |v_j^{(m)} - \widehat{f}(\xi_j^{(m)})|$$

se hace pequeño cuando m se hace grande. Verificar si $\varepsilon_m = O(1/m)$, o $\varepsilon_m = O(1/m^2)$, o el error ε_m tiene algún otro orden de decaimiento en términos de m.