# Aproximación de los coeficientes de Fourier por la transformada finita de Fourier

**Objetivos.** Mostrar que los coeficientes de Fourier se pueden calcular de manera aproximada, usando la transformada finita de Fourier.

**1. Proposición (aproximación de la integral definida por la regla compuesta de rectángulos izquierdos).** Sea $g$ una función continuamente derivable en un segmento $[a,b]$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Pongamos

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_k = a + kh \quad (0 \leqslant k < n).$$

Entonces

$$\left| \int_a^b g(x)\,dx - \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}\|g'\|_\infty. \tag{1}$$

*Demostración.* Sea

$$\Delta := \int_a^b g(x)\,dx - \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k).$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x_k)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (g(x) - g(x_k))\,dx.\end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio,

$$|g(x) - g(x_k)| \leqslant (x - x_k)\|g'\|_\infty,$$

por eso

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |g(x) - g(x_k)|\,dx \leqslant \|g'\|_\infty \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} = \|g'\|_\infty \frac{(b-a)^2}{2n^2},$$

y $|\Delta| \leqslant \dfrac{(b-a)^2 h \|g'\|_\infty}{2n}$. □

**2. Proposición (aproximación de los coeficientes de Fourier por medio de la transformada finita de Fourier).** Sea $f$ una función continuamente derivable en $\mathbb{R}$ y $2\pi$-periódica. Sean $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$. Pongamos

$$b_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{2jk\pi\,\mathrm{i}}{n}}\ f\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Entonces

$$\left|\widehat{f}_j - b_j\right| \leqslant \frac{\pi}{n}\left(|j|\,\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right).$$

*Demostración.* El resultado se obtiene de la proposición anterior aplicada a la función

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, jx}$$

en el segmento $[0, 2\pi]$. Notamos que

$$g'(x) = \frac{1}{2\pi} \left( f'(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, jx} - \mathrm{i}\, j f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, jx} \right),$$

así que

$$\|g'\|_\infty \leqslant \frac{1}{2\pi} \left( \|f'\|_\infty + |j|\, \|f\|_\infty \right). \qquad \square$$