Aproximación de funciones positivas medibles por funciones simples positivas medibles

Objetivos. Demostrar que toda función positiva medible es el límite de una sucesión creciente de funciones positivas simples medibles.

Requisitos. Funciones simples.

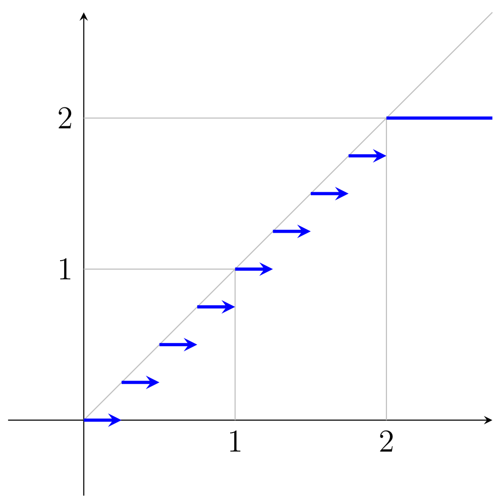
1. Proposición. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $\varphi_n \colon [0, +\infty] \to [0, +\infty)$ mediante la fórmula

$$\varphi_n(t) \coloneqq \begin{cases} \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}, & 0 \le t < n; \\ n, & n \le t \le +\infty. \end{cases}$$

Entonces φ_n es simple y medible. Más precisamente,

1. $\mathcal{R}(\varphi_n) = \left\{ \dfrac{m}{2^n} \colon \ m \in \{0, \ldots, n2^n\} \right\}$.
2. $\varphi_n^{-1}\left[\left\{\dfrac{m}{2^n}\right\}\right] = \left[\dfrac{m}{2^n}, \dfrac{m+1}{2^n}\right)$ para todo $m \in \{0, \ldots, n2^n - 1\}$.
3. $\varphi_n^{-1}[\{n\}] = [n, +\infty]$.

2. Observación. Si $t < n$, entonces la función φ_n redondea t hacia abajo hasta el próximo número fraccionario de la forma $\frac{m}{2^n}$. La gráfica de φ_2:



3. Ejercicio. Demuestre la Proposición 1. Dibuje las gráficas de las funciones φ_1 y φ_3.

4. Proposición. Definimos las funciones φ_n mediante la fórmula (1). Entonces para todo $t \in [0, +\infty]$ la sucesión $(\varphi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y tiene límite t.

Demostración. Primero consideremos el caso $t = +\infty$. En este caso $\varphi_n(t) = n$, la sucesión $(\varphi_n(+\infty))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y tiende a $+\infty$.

Sea $t \in [0, +\infty)$. Demostremos que $\varphi_n(t) \to t$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces poniendo $m = \lfloor 2^n t \rfloor$ obtenemos que $m \le 2^n t < m + 1$, esto es, $\frac{m}{2^n} \le t < \frac{m+1}{2^n}$. Si $n > t$, entonces $\varphi_n(t) = \frac{m}{2^n}$ y

$$0 \le t - \varphi_n(t) = t - \frac{m}{2^n} < \frac{m+1}{2^n} - \frac{m}{2^n} = \frac{1}{2^n},$$

esto es,

$$t - \frac{1}{2^n} < \varphi_n(t) \le t.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0$.

Sea $t \in \mathbb{R}_+$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Demostremos que $\varphi_n(t) \le \varphi_{n+1}(t)$. Si $t \ge n + 1$, entonces $\varphi_n(t) = n$, $\varphi_{n+1}(t) = n + 1$. Si $n \le t < n + 1$, entonces $\varphi_n(t) = n$ y

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{\lfloor 2^{n+1} t \rfloor}{2^{n+1}} \ge \frac{\lfloor n 2^{n+1} \rfloor}{2^{n+1}} = n = \varphi_n(t).$$

Al fin consideremos el caso $t < n$. Representemos el número entero $\lfloor 2^{n+1} t \rfloor$ como $2m + r$, donde $r \in \{0, 1\}$. Entonces $\varphi_{n+1}(t) = \frac{2m+r}{2^{n+1}}$. Para calcular $\varphi_n(t)$, notemos que

$$2m + r \le 2^{n+1} t < 2m + r + 1, \qquad m + \frac{r}{2} \le 2^n t < m + \frac{r+1}{2}.$$

En particular, $m \le 2^n t < m + 1$, por lo tanto $\lfloor 2^n t \rfloor = m$ y $\varphi_n(t) = \frac{m}{2^n}$. Ahora podemos comparar $\varphi_{n+1}(t)$ con $\varphi_n(t)$:

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{2m + r}{2^{n+1}} = \frac{m}{2^n} + \frac{r}{2^{n+1}} \ge \varphi_n(t). \qquad \square$$

5. Proposición (cada función positiva medible es el límite de una sucesión creciente de funciones medibles simples). Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to [0, +\infty]$ una función $\mathcal{F}$-medible. Entonces existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples $\mathcal{F}$-medibles $g_n\colon X \to [0, +\infty)$ tales que para cada x en X la sucesión $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y tiende a $f(x)$.

Demostración. Poner $g_n \coloneqq \varphi_n \circ f$ y aplicar proposiciones anteriores. $\square$