

Núcleos aproximativos sobre el eje real

Definición 1. Una familia $(K_t)_{t>0}$ en $L^1(\mathbb{R})$ se llama *núcleo aproximativo* si

- $\sup_{t>0} \|K_t\|_1 < +\infty$;
- para cada $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}} K_t(x) dx = 1$;
- para cada $\delta > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(x)| dx = 0$.

Proposición 2. Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $g(x) \geq 0$ y $\|g\|_1 = 1$. Para cada $t > 0$ pongamos

$$K_t(x) = \frac{1}{t} g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Entonces la familia $(K_t)_{t>0}$ es un núcleo aproximativo.

Demostración. Con el cambio de variable $y = x/t$ obtenemos

$$\|K_t\|_1 = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{t}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} K_t(x) dx = \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta/t, \delta/t)} g(y) dy.$$

Como $g \in L^1(\mathbb{R})$, la última integral tiende a 0 cuando t tiende a 0. \square

Proposición 3 (el núcleo de Gauss–Weierstrass). La familia de funciones $(H_t)_{t>0}$, donde

$$H_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

es un núcleo aproximativo.

Proposición 4. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función acotada y uniformemente continua, y sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f * K_t - f\|_{\infty} = 0.$$

Demostración. Denotemos por ω_f al módulo de continuidad de f . Para cada $t > 0$ y cada $x \in \mathbb{R}$,

$$|(f * K_t)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| |f(x-y) - f(x)| dy. \quad (1)$$

Para cada $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} |(f * K_t)(x) - f(x)| &\leq \int_{(-\delta, \delta)} |f(x-y) - f(x)| |K_t(y)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |f(x-y) - f(y)| |K_t(y)| dy \\ &\leq \omega_f(\delta) \sup_{t>0} \|K_t\|_1 + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la hipótesis que f es uniformemente continua, elegimos $\delta > 0$ tal que

$$\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{2 \sup_{t>0} \|K_t\|_1}.$$

Luego elegimos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty + 1}.$$

Entonces para cada t en $(0, t_0)$ y cada x en \mathbb{R} obtenemos

$$|(f * K_t)(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad \square$$

Definición 5. Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y sea $h \in \mathbb{R}$. Denotemos por $\tau_h f$ a la función

$$(\tau_h f)(x) := f(x - h).$$

Proposición 6. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $h \in \mathbb{R}$. Entonces $\tau_h f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\|\tau_h f\|_1 = \|f\|_1$.

Demostración. Hacemos un cambio de variable en la integral usando el hecho que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones. \square

Proposición 7. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_1 = 0.$$

Demostración. 1. Primero supongamos que f es continua y de soporte compacto: $f \in C_c(\mathbb{R})$. Sea L tal que $f(x) = 0$ para cada x en $\mathbb{R} \setminus (-L, L)$. Entonces

$$\|\tau_h f - f\|_1 \leq \int_{x \in \mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dx \leq 2L\omega_f(|h|).$$

Como f es uniformemente continua, la última expresión tiende a 0 cuando h tiende a 0.

2. Ahora consideremos el caso general: $f \in L^1(\mathbb{R})$. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, encontramos $g \in C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|f - g\|_1 < \varepsilon/3$. Usando el resultado de la primera parte de la demostración, encontramos $\delta > 0$ tal que para cada h en \mathbb{R} con $|h| < \delta$ se cumple $\|g - \tau_h g\|_1 < \varepsilon/3$. Entonces para cada h con $|h| < \delta$ obtenemos

$$\|\tau_h f - f\|_1 \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_1 + \|\tau_h g - g\|_1 + \|g - f\|_1 < \varepsilon. \quad \square$$

Proposición 8. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f * K_t - f\|_1 = 0.$$

Demostración. Como ya vimos en (1),

$$|(f * K_t)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| |(\tau_y f)(x) - f(x)| dy.$$

Integramos sobre x e intercambiamos las integrales usando el teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned} \|f * K_t - f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| |(\tau_y f)(x) - f(x)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| |(\tau_y f)(x) - f(x)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} |K_t(y)| \|\tau_y f - f\|_1 dy. \end{aligned}$$

Para cada $\delta > 0$ podemos dividir la última integral en dos partes:

$$\begin{aligned} \|f * K_t - f\|_1 &\leq \int_{(-\delta, \delta)} |K_t(y)| \|\tau_y f - f\|_1 dy + \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| \|\tau_y f - f\|_1 dy \\ &\leq \sup_{t>0} \|K_t\|_1 \cdot \sup_{y \in (-\delta, \delta)} \|\tau_y f - f\|_1 + 2\|f\|_1 \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la Proposición 7 encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{y \in (-\delta, \delta)} \|\tau_y f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2 \sup_{t>0} \|K_t\|_1}.$$

Luego aplicando la definición del núcleo aproximativo encontramos $t_0 > 0$ tal que para cada t en $(0, t_0)$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} |K_t(y)| dy < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_1 + 1}.$$

Entonces para cada t en $(0, t_0)$ obtenemos $\|f * K_t - f\|_1 < \varepsilon$. □

Proposición 9 (convolución con el núcleo de calor, repaso). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Corolario 10 (la propiedad inyectiva de la transformada de Fourier). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = 0$. Entonces $f = 0$ c.t.p.

Tarea 11. Sean $p \in (1, +\infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, y sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo. Demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f * K_t - f\|_p = 0.$$