# Definición analítica del número $\pi$

**Objetivos.** Definir el número $\pi$ de manera analítica, como $\pi := 2x_0$, donde $x_0$ es el único cero de la función coseno en el intervalo $[0, 2]$.

**Prerrequisitos.** Descomposición en series de potencias de las funciones cos y sen, las derivadas de cos y sen.

En estos apuntes, seguimos las ideas del libro de Rudin "Real and complex analysis", primeras páginas.

**Lema 1.** *Para cada $x$ en $(0, 2]$,*

$$\operatorname{sen}(x) > 0.$$

*Demostración informal.* Antes de demostrar el lema de manera rigurosa, veamos la idea principal de manera informal. La función sen se descompone en una serie de potencias que empieza de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots .$$

Agrupamos los términos de esta serie en pares, y en cada par factorizamos el primer sumando:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right) + \cdots \\ &= x\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!}\left(1 - \frac{x^2}{10\cdot 11}\right) + \cdots . \end{aligned}$$

La suposición que $0 < x \le 2$ implica que el primer sumando es positivo o cero, y los demás sumandos son estrictamente positivos. Por lo tanto, la suma de la serie es estrictamente positiva. □

*Demostración.* Sabemos que la función seno tiene la siguiente descomposición en series de potencias:

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{1}$$

Esta fórmula funciona para cada $x$ en $\mathbb{R}$ y, en particular, para cada $x$ en $(0, 2]$. Consideremos la subsucesión de las sumas parciales que corresponden a los índices de la forma $n = 2m+1$. Usamos el hecho que si existe el límite de la sucesión, entonces existe el límite de la subsucesión:

$$\operatorname{sen}(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

En la última suma, para $k$ par, hacemos el cambio de variable $k = 2j$, y para $k$ impar, hacemos el cambio de variable $k = 2j + 1$. Luego agrupamos los términos con índices $k = 2j$ y $k = 2j + 1$:

$$\operatorname{sen}(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \left( \frac{x^{4j+1}}{(4j+1)!} - \frac{x^{4j+3}}{(4j+3)!} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x),$$

donde

$$a_j(x) := \frac{x^{4j+1}}{(4j+1)!} - \frac{x^{4j+3}}{(4j+3)!}.$$

Consideremos el $j$-ésimo término de la serie obtenida, es decir, $a_j(x)$. Lo expresamos de la siguiente manera:

$$a_j(x) = \frac{x^{4j+1}}{(4j+1)!} - \frac{x^{4j+3}}{(4j+3)!} = \frac{x^{4j+1}}{(4j+1)!} \left( 1 - \frac{x^2}{(4j+2)(4j+3)} \right).$$

Suponiendo que $0 < x \le 2$, obtenemos la siguiente cota:

$$x^2 \le 2 \cdot 2 \le (4j+2)(4j+3).$$

De aquí se sigue que $a_j(x) \ge 0$ para cada $j$. Más aún, $a_j(x) > 0$ para $j \ge 1$. En particular, $a_1(x) > 0$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \ge a_1(x) > 0. \qquad \square$$

**Lema 2.** $\cos(2) < 0$.

*Demostración informal.* Antes de demostrar el lema de manera rigurosa, veamos la idea principal de manera informal. La función cos se descompone en una serie de potencias que empieza de la siguiente manera:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} - \frac{x^{12}}{12!} + \cdots.$$

En particular, esta descomposición se tiene para $x = 2$. A partir del término con $x^6$, agrupamos los términos de esta serie en pares, y en cada par factorizamos el primer sumando:

$$\begin{aligned}
\cos(2) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left( \frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!} \right) - \left( \frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!} \right) - \cdots \\
&= -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{6!} \left( 1 - \frac{2^2}{7 \cdot 8} \right) - \frac{2^{10}}{10!} \left( 1 - \frac{2^2}{11 \cdot 12} \right) - \cdots.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que todos los sumandos son estrictamente negativos. $\square$

*Demostración.* Sabemos que la función coseno tiene la siguiente descomposición en series de potencias:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \tag{2}$$

Esta fórmula funciona para cada $x$ en $\mathbb{R}$ y, en particular, para $x = 2$:

$$\cos(2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}.$$

Consideremos la subsucesión de las sumas parciales que corresponden a los índices de la forma $n = 2m$. Usamos el hecho que si existe el límite de la sucesión, entonces existe el límite de la subsucesión:

$$\cos(2) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}.$$

En la última suma, separamos los sumandos con los índices $k = 0$, $k = 1$ y $k = 2$. Para $k \geq 3$, para los índices impares hacemos el cambio de variable $k = 2j - 1$, y para los índices pares hacemos el cambio de variable $k = 2j$. Agrupamos los sumandos con índices $2j - 1$ y $2j$:

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} + \sum_{j=2}^{m} \left( -\frac{2^{4j-2}}{(4j-2)!} + \frac{2^{4j}}{(4j)!} \right) = -\frac{1}{3} + \sum_{j=2}^{m} b_j,$$

donde

$$b_j := -\frac{2^{4j-2}}{(4j-2)!} + \frac{2^{4j}}{(4j)!}.$$

En la expresión $b_j$ factorizamos el primer término:

$$b_j = -\frac{2^{4j-2}}{(4j-2)!} \left( 1 - \frac{4}{(4j-1)4j} \right).$$

Como $4 < (4j-1)4j$, concluimos que $b_j < 0$ para cada $j$. Por lo tanto,

$$\cos(2) \leq -\frac{1}{3} < 0. \qquad \square$$

**Observación 3.** Recordemos la siguiente propiedad de funciones derivables. Supongamos que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ tal que $f$ es derivable en $(\alpha, \beta)$ y $f'(x) > 0$ para cada $x$ en $(\alpha, \beta)$. Entonces, $f$ es estrictamente creciente en $[\alpha, \beta]$. En efecto, si $x, y \in [\alpha, \beta]$ y $x < y$, entonces, por el teorema del valor medio, existe $z$ tal que $x < z < y$ y

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x).$$

Como $z \in (\alpha, \beta)$, concluimos que $f'(z) > 0$ y

$$f(y) - f(x) > 0.$$

De manera similar, si $f'(x) < 0$ para cada $x$ en $(\alpha, \beta)$, entonces $f$ es estrictamente decreciente en $[\alpha, \beta]$.

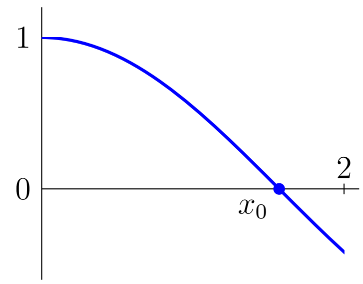
**Teorema 4.** *La función* cos *tiene un único cero en el intervalo cerrado* $[0, 2]$.

*Demostración.* Sabemos que $\cos' = -\operatorname{sen}$. Por el lema 1, para cada $x$ en $(0, 2]$, tenemos que

$$\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x) < 0.$$

Por lo tanto, cos es estrictamente decreciente en $(0, 2]$. En particular, cos no puede tener más de un cero en $(0, 2]$.

Además, directamente de (2) tenemos que $\cos(0) = 1$. Por el lema 2, $\cos(2) < 0$. Por el teorema del valor intermedio, existe un cero de cos en $(0, 2)$. $\square$




**Definición 5** (definición analítica del número $\pi$)**.** $\pi := 2x_0$, donde $x_0$ es el (único) número en $(0, 2)$ tal que $\cos(x_0) = 0$.

**Ejercicio 6.** Demostrar que $\cos(1) > 0$ y $\frac{\pi}{2} > 1$. Sugerencia: en la descomposición (2) sustituir $x = 1$.

**Proposición 7** (propiedades básicas de cos y sen en el segmento $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)**.** *La función* cos *decrece estrictamente en* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*, tomando todos los valores de* $1$ *a* $0$*. La función* sen *crece estrictamente en* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*, tomando todos los valores de* $0$ *a* $1$*. En particular,*

$$\cos\left[\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right] = [0, 1], \qquad \operatorname{sen}\left[\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right] = [0, 1].$$

*Demostración.* De la definición de $\pi$ se sigue que $\frac{\pi}{2}$ es el único cero de cos en $[0, 2]$. Además, sabemos que cos decrece estrictamente en $[0, 2]$ y, en particular, en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Luego, para cada $x$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos que

$$1 = \cos(0) > \cos(x) > \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Por el teorema del valor intermedio, cos toma todos los valores entre 0 y 1.

Como $\operatorname{sen}' = \cos$, la función seno crece estrictamente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De (1) se sigue que $\operatorname{sen}(0) = 0$. Por la identidad de Pitágoras,

$$\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1.$$

En el lado izquierdo, el primer sumando es 0. Además, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} > 0$. Luego

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1.$$

Como la función seno es estrictamente creciente, concluimos que para cada $x$ en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$0 = \operatorname{sen}(0) < \operatorname{sen}(x) < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1.$$

Además, como sen es una función continua, por el teorema del valor intermedio concluimos que sen toma todos los valores entre 0 y 1. $\square$