Análisis III. Introducción

Egor Maximenko

ESFM del IPN

3 de agosto de 2009

Contenido

Contenido

Contenido

Programa del curso

1. **Convergencia uniforme.**
   Trasposición de límites. Derivación bajo del signo del límite.
2. **Funciones definidas por integrales.**
   (Integrales dependientes de un parámetro.)
   Continuidad y derivación. Integrales impropias.
   Integrales impropias dependientes de un parámetro.
3. **Convolución.**
   Convolución en $L_1(\mathbb{R}^n)$. Convolución entre espacios $L_p(\mathbb{R}^n)$.
   Sucesiones de Dirac (unidad aproximada).
4. **Series de Fourier.**
   Convergencia en $L_2([-\pi, \pi])$. Convergencia puntual.
5. **Transformadas de Fourier y Laplace.**
   Transformada de Fourier: propiedades e inversión.
   Transformada de Laplace.

Sistema de calificaciones

Tres exámenes parciales.

Sistema de calificaciones

Tres exámenes parciales.

También se tienen en cuenta:

- participaciones
- exposiciones
- solución de tareas

Contenido

Literatura I

O. Biberstein,
Teoría de la Integral, Notas de la E.S.F.M. del I.P.N.

W. Rudin,
Análisis Real y Complejo.
Alhambra, 1985.

A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin,
Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.
Mir.

B. Demidovich,
Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.
Mir.

H. G. Garnir,
Funciones de variables reelles II.
Gauthier-Villars.

Literatura II

- S. Lang,
  Real Analysis.
  Addison Wesley.
- H. L. Royden,
  Real Analysis.
  Macmillan.
- T. M. Apóstol,
  Análisis Matemático.
  Reverté.
- E. Hewitt and K. Stromberg,
  Real and Abstract Analysis.
  Springer-Verlag.

Contenido

Contenido

La norma-supremo y convergencia uniforme

Definición (norma-supremo de una función)

Para una función $f\colon X \to \mathbb{C}$, su norma-supremo se define como

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

La norma-supremo y convergencia uniforme

Definición (norma-supremo de una función)

Para una función $f\colon X \to \mathbb{C}$, su norma-supremo se define como

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Definición (convergencia uniforme de una sucesión de funciones)

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{C}$ y g una función $X \to \mathbb{C}$. Se dice que f_n converge uniformemente a g (notación: $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$) si

$$\|f_n - g\|_\infty \to 0.$$

La norma-supremo y convergencia uniforme

Definición (norma-supremo de una función)

Para una función $f\colon X \to \mathbb{C}$, su norma-supremo se define como

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Definición (convergencia uniforme de una sucesión de funciones)

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{C}$ y g una función $X \to \mathbb{C}$. Se dice que f_n converge uniformemente a g (notación: $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$) si

$$\|f_n - g\|_\infty \to 0.$$

En otras palabras, $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g$ si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Trasposición de límites

Sean X un espacio métrico, $x_0 \in X$,
f_n y g funciones definidas en $X \setminus \{x_0\}$.

Trasposición de límites

Sean X un espacio métrico, $x_0 \in X$,
f_n y g funciones definidas en $X \setminus \{x_0\}$.

Supongamos que:

- para todo $x \in X \setminus \{x_0\}$ se tiene $f_n(x) \to g(x)$ cuando $n \to \infty$,
- para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f_n(x) \to A_n$ cuando $x \to x_0$.

Trasposición de límites

Sean X un espacio métrico, $x_0 \in X$,
f_n y g funciones definidas en $X \setminus \{x_0\}$.

Supongamos que:

- para todo $x \in X \setminus \{x_0\}$ se tiene $f_n(x) \to g(x)$ cuando $n \to \infty$,
- para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f_n(x) \to A_n$ cuando $x \to x_0$.

Pregunta capciosa

¿Podemos deducir de aquí que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, i.e.

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)?$$

Trasposición de límites

Sean X un espacio métrico, $x_0 \in X$,
f_n y g funciones definidas en $X \setminus \{x_0\}$.

Supongamos que:

- para todo $x \in X \setminus \{x_0\}$ se tiene $f_n(x) \to g(x)$ cuando $n \to \infty$,
- para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f_n(x) \to A_n$ cuando $x \to x_0$.

Pregunta capciosa

¿Podemos deducir de aquí que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, i.e.

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)?$$

Respuesta: no. En general, no es posible transponer los límites.
¿Y cuándo es posible?
Una condición suficiente es la convergencia uniforme.

Transposición de límites: Contraejemplo

Ejemplo (cuando los límites repetidos no son iguales)

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x > 0).$$

Transposición de límites: Contraejemplo

Ejemplo (cuando los límites repetidos no son iguales)

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x > 0).$$

Consideremos los límites repedidos de $f_n(x)$ cuando $x \to 0$, $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} \frac{nx}{nx+1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{nx+1} =$$

Transposición de límites: Contraejemplo

Ejemplo (cuando los límites repetidos no son iguales)

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x > 0).$$

Consideremos los límites repedidos de $f_n(x)$ cuando $x \to 0$, $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} \frac{nx}{nx+1} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0;$$
$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{nx+1} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Transposición de límites: Contraejemplo

Ejemplo (cuando los límites repetidos no son iguales)

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} \qquad (n \in \mathbb{N},\ x > 0).$$

Consideremos los límites repedidos de $f_n(x)$ cuando $x \to 0$, $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} \frac{nx}{nx+1} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{nx+1} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Tarea

Buscar un ejemplo, cuando uno de los límites repetidos existe y otro no.

Contenido

Funciones definidas por integrales

Vamos a considerar integrales dependientes de un parámetro:

$$\int_\Omega f(x,\lambda)\,dx.$$

El valor de la integral depende de λ, por eso podemos considerar la función definida por esta integral:

$$\Phi(\lambda) := \int_\Omega f(x,\lambda)\,dx.$$

Funciones definidas por integrales

Vamos a considerar integrales dependientes de un parámetro:

$$\int_{\Omega} f(x, \lambda)\, dx.$$

El valor de la integral depende de λ, por eso podemos considerar la función definida por esta integral:

$$\Phi(\lambda) := \int_{\Omega} f(x, \lambda)\, dx.$$

Vamos a demostrar criterios suficientes para que:

- Φ sea continua;

Funciones definidas por integrales

Vamos a considerar integrales dependientes de un parámetro:

$$\int_\Omega f(x,\lambda)\,dx.$$

El valor de la integral depende de λ, por eso podemos considerar la función definida por esta integral:

$$\Phi(\lambda) := \int_\Omega f(x,\lambda)\,dx.$$

Vamos a demostrar criterios suficientes para que:

- Φ sea continua;
- Φ sea derivable y se cumpla la fórmula de Leibniz:

$$\Phi'(\lambda) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x,\lambda) dx.$$

Integrales impropias: repaso

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b)$ e integrable en todo subintervalo $[a, \beta]$, $a < \beta < b$. Entonces el límite

$$\lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f$$

se llama integral impropia y se denota por $\displaystyle\int_a^{\to b} f$.

Integrales impropias: repaso

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b)$ e integrable en todo subintervalo $[a, \beta]$, $a < \beta < b$. Entonces el límite

$$\lim_{\beta \to b} \int_a^{\beta} f$$

se llama integral impropia y se denota por $\displaystyle\int_a^{\to b} f$.

Ejemplos (¿cuáles de estas integrales son convergentes?)

$$\int_0^{\to +\infty} e^{-x}\,dx, \qquad \int_1^{\to +\infty} \frac{dx}{x}, \qquad \int_1^{\to +\infty} \frac{dx}{x^2},$$

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad \int_1^{\to +\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^2}, \qquad \int_1^{\to +\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Funciones definidas por integrales impropias

$$\Phi(\lambda) := \int_a^{\to b} f(x, \lambda)\, dx.$$

Funciones definidas por integrales impropias

$$\Phi(\lambda) := \int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx.$$

Nuestro objetivo consiste en responder las siguientes preguntas (demostrar criterios suficientes):

Funciones definidas por integrales impropias

$$\Phi(\lambda) := \int_a^{\to b} f(x,\lambda)\, dx.$$

Nuestro objetivo consiste en responder las siguientes preguntas (demostrar criterios suficientes):

¿Cuándo la integral converge uniformemente?

Funciones definidas por integrales impropias

$$\Phi(\lambda) := \int_a^{\to b} f(x, \lambda)\, dx.$$

Nuestro objetivo consiste en responder las siguientes preguntas (demostrar criterios suficientes):

¿Cuándo la integral converge uniformemente?

¿Cuándo la función Φ es continua?

Funciones definidas por integrales impropias

$$\Phi(\lambda) := \int_a^{\to b} f(x, \lambda)\, dx.$$

Nuestro objetivo consiste en responder las siguientes preguntas (demostrar criterios suficientes):

¿Cuándo la integral converge uniformemente?

¿Cuándo la función Φ es continua?

¿Cuándo la función Φ es derivable y es posible derivar respecto al parámetro bajo el signo integral?

$$\Phi'(\lambda) = \int_a^{\to b} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x, \lambda) dx.$$

Ejemplos principales

Ejemplo (integral de Dirichlet, integrales de Fresnel)

Vamos a calcular las siguientes integrales a través de integrales impropias dependientes de parámetros:

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad \int_0^{\to+\infty} \cos x^2\, dx, \quad \int_0^{\to+\infty} \sin x^2\, dx.$$

Ejemplos principales

Ejemplo (integral de Dirichlet, integrales de Fresnel)

Vamos a calcular las siguientes integrales a través de integrales impropias dependientes de parámetros:

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad \int_0^{\to+\infty} \cos x^2\, dx, \quad \int_0^{\to+\infty} \sin x^2\, dx.$$

Ejemplo (funciones Γ y B)

Vamos a estudiar propiedades de las funciones Γ y B definidas como integrales impropias dependientes de parámetros:

$$\Gamma(\lambda) = \int_{\to 0}^{\to+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x}\, dx; \qquad \mathrm{B}(\lambda,\mu) = \int_{\to 0}^{\to 1} x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}\, dx.$$

Contenido

Convolución

Definición (convolución de dos funciones integrables)

Sean $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. La convolución de f y g (notación: $f * g$) es una función definida en $\mathbb{R}^n$ mediante la fórmula:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y - x) g(x)\, dx.$$

Convolución

Definición (convolución de dos funciones integrables)

Sean $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. La convolución de f y g (notación: $f * g$) es una función definida en $\mathbb{R}^n$ mediante la fórmula:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y - x) g(x) \, dx.$$

Aplicaciones de la convolución:

- densidad de la suma de dos variables aleatorias independientes;
- promedio móvil ponderado en estadística;
- multiplicación de polinomios (la convolución discreta);
- sistemas tiempo-invariantes en ingeniería eléctrica;
- sombras en óptica, interferencia en acústica, etc.

Álgebra de convolución

Teorema

Si $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Además, la convolución cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad asociativa: $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- Propiedad conmutativa: $f * g = g * f$.
- Propiedad distributiva: $(f + g) * h = (f * h) + (g * h)$.
- Propiedad homogenea: $(\lambda f) * g = \lambda(f * g)$.

Esto significa que el espacio de Banach $L_1(\mathbb{R}^n)$ con la operación de convolución es una álgebra de Banach conmutativa.

Contenido

Series de Fourier

Definición (coeficientes de Fourier)

Para una función $f \in L_1[-\pi, \pi]$, sus coeficientes de Fourier son

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nix} \, dx.$$

Series de Fourier

Definición (coeficientes de Fourier)

Para una función $f \in L_1[-\pi, \pi]$, sus coeficientes de Fourier son

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nix}\, dx.$$

Definición (sumas parciales de Fourier)

Para $f \in L_1[-\pi, \pi]$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$S_{f,m} = \sum_{n=-m}^{m} f_n e^{nix}.$$

Series de Fourier

Definición (coeficientes de Fourier)

Para una función $f \in L_1[-\pi, \pi]$, sus coeficientes de Fourier son

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nix}\, dx.$$

Definición (sumas parciales de Fourier)

Para $f \in L_1[-\pi, \pi]$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$S_{f,m} = \sum_{n=-m}^{m} f_n e^{nix}.$$

La serie correspondiente se llama serie de Fourier.
Bajo ciertas condiciones, esta serie converge a la función original.

Convergencia de series de Fourier

Teorema (convergencia en L_2)

Si $f \in L_2[-\pi, \pi]$, entonces $S_{f,m} \to f$ en $L_2[-\pi, \pi]$, i.e.

$$\|S_{f,m} - f\|_2 \to 0 \quad \textit{cuando} \quad m \to \infty.$$

Convergencia de series de Fourier

Teorema (convergencia en L_2)

Si $f \in L_2[-\pi, \pi]$, entonces $S_{f,m} \to f$ en $L_2[-\pi, \pi]$, i.e.

$$\|S_{f,m} - f\|_2 \to 0 \quad \textit{cuando} \quad m \to \infty.$$

Pregunta (convergencia puntual)

Dados $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ y $x_0 \in [-\pi, \pi]$,
¿cuándo podemos garantizar que

$$S_{f,m}(x_0) \to f(x_0)?$$

Contenido

Transformada de Fourier

Definición

Transformada de Fourier de una función $f \in L_1(\mathbb{R})$ es una función $\mathcal{F}f \in L_\infty(\mathbb{R})$, definida por la fórmula:

$$(\mathcal{F}f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixu}\,dx.$$

Transformada de Fourier

Teorema (Fourier)

Bajo ciertas condiciones, la transformada de Fourier es invertible:
si $f \in L_1(\mathbb{R})$ *y* $\mathcal{F}f \in L_1(\mathbb{R})$, *entonces*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f)(u) e^{-ixu}\, du.$$

Transformada de Fourier

Teorema (Fourier)

Bajo ciertas condiciones, la transformada de Fourier es invertible:
si $f \in L_1(\mathbb{R})$ *y* $\mathcal{F}f \in L_1(\mathbb{R})$, *entonces*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f)(u) e^{-ixu}\, du.$$

Teorema (Plancherel)

La transformada de Fourier, debidamente normalizada, conserva la L_2*-norma: para* $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$,

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}f \right\|_2 = \|f\|_2.$$

El operador $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}$ *se puede extender hasta un isomorfismo isométrico* $L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.

Transformada de Fourier, convolución y derivada

Transformada de Fourier convierte la convolución en la multiplicación:

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g).$$

Transformada de Fourier, convolución y derivada

Transformada de Fourier convierte la convolución en la multiplicación:

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g).$$

Transformada de Fourier convierte la derivación en la multiplicación por la variable (con cierto coeficiente):

$$(\mathcal{F}f')(u) = iu \cdot (\mathcal{F}f)(u).$$

Transformada de Fourier, convolución y derivada

Transformada de Fourier convierte la convolución en la multiplicación:

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g).$$

Transformada de Fourier convierte la derivación en la multiplicación por la variable (con cierto coeficiente):

$$(\mathcal{F}f')(u) = iu \cdot (\mathcal{F}f)(u).$$

Gracias a estas propiedades, la transformada de Fourier se usa mucho:

- en teoría de ecuaciones integrales:
  ecuaciones de convolución y ecuaciones integrales singulares;
- en teoría de ecuaciones diferenciales.

Transformada de Laplace

Definición

Transformada de Laplace de una función f definida en $[0, +\infty)$ es la función $\mathcal{L}f$, definida por la fórmula:

$$(\mathcal{L}f)(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} f(x)\, dx.$$

Transformada de Laplace

Definición

Transformada de Laplace de una función f definida en $[0, +\infty)$ es la función $\mathcal{L}f$, definida por la fórmula:

$$(\mathcal{L}f)(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} f(x)\, dx.$$

Transformada de Laplace y derivada

$$(\mathcal{L}f')(u) = u \cdot (\mathcal{L}f)(u) - f(0).$$

Transformada de Laplace

Definición

Transformada de Laplace de una función f definida en $[0, +\infty)$ es la función $\mathcal{L}f$, definida por la fórmula:

$$(\mathcal{L}f)(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} f(x)\, dx.$$

Transformada de Laplace y derivada

$$(\mathcal{L}f')(u) = u \cdot (\mathcal{L}f)(u) - f(0).$$

Transformada de Laplace y convolución

$$\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f) \cdot (\mathcal{L}g).$$

Gracias a estas propiedades, la transformada de Laplace se usa para resolver ecuaciones diferenciales e integrales.