Examen parcial II. Variante 1 (demostrativa) Análisis III

$\boxed{1}$ Escriba las siguientes definiciones y enuncie los siguientes teoremas (sin demostraciones):

1. Las propiedades de la convolución como una operación binaria en $L^1(\mathbb{R}^n)$.
2. El teorema sobre $f * \rho_\nu$, donde $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\{\rho_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Dirac.
3. Propiedades de la función $f*g$ cuando $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$.

$\boxed{2}$ Calcule $f * g$, donde las funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están definidas mediante las siguientes fórmulas:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [0,1]; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$\boxed{3}$ Demuestre la desigualdad de Young para el caso $p = 1$, $q \in (1, +\infty)$, i.e. demostrar la cota superior para $\|f * g\|_q$, donde $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R})$.

$\boxed{4}$ Sea $\mathcal{A}$ el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ con la operación de multiplicación

$$(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) := (a_0 b_0 + a_1 b_1, a_0 b_1 + a_1 b_0)$$

y con la norma $\|(a_0, a_1)\| = |a_0| + |a_1|$. Demuestre que $\|a \cdot b\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ para todos $a, b \in \mathcal{A}$, y hallar la unidad del álgebra $\mathcal{A}$.

$\boxed{5}$ Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demuestre que para todos $x_1, x_2, x_3 \in I$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$, se cumplen las siguientes desigualdades:

1. $\Delta(f, x_1, x_2) \leqslant \Delta(f, x_1, x_3)$.
2. $\Delta(f, x_1, x_2) \leqslant \Delta(f, x_2, x_3)$.

Aquí $\Delta(f, a, b) := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$\boxed{6}$ Sean $\{\rho_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Dirac, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que f es continua en el punto x. Demuestre que $(f * \rho_\nu)(x) \to f(x)$ cuando $\nu \to \infty$.

Examen parcial II. Variante 2 (demostrativa) Análisis III

$\boxed{1}$ Escriba las siguientes definiciones y enuncie los siguientes teoremas (sin demostraciones):

1. La definición de sucesión de Dirac.
2. La desigualdad de Young (cota superior para $\|f * g\|_r$).
3. El teorema sobre el soporte de la convolución.

$\boxed{2}$ Calcule $f * g$, donde las funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están definidas mediante las siguientes fórmulas:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [0,1]; \end{cases} \qquad g(x) = 1_{[0,1]} = \begin{cases} 1, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

$\boxed{3}$ Demuestre la desigualdad de Young para el caso $p \in (1, +\infty)$, $q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} > 1$, i.e. demostrar la cota superior para $\|f * g\|_r$, donde $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

$\boxed{4}$ Sea $\mathcal{A}$ el espacio vectorial complejo de las sucesiones bilaterales $\ell^1(\mathbb{Z})$ con la norma $\|a\|_1 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|$ y operación de multiplicación $*$ definida mediante:

$$(a * b)_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n-k} b_k.$$

Demuestre que esta operación es conmutativa y que $\|a * b\|_1 \leqslant \|a\|_1 \cdot \|b\|_1$ para todos $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Hallar la unidad del álgebra $(\ell^1(\mathbb{Z}), *, \|\cdot\|_1)$.

$\boxed{5}$ Demuestre la desigualdad de Jensen para el caso cuando el valor de la integral $\int f\rho$ es un punto interno del intervalo I donde está definida la función convexa ϕ.

$\boxed{6}$ Sean $\{\rho_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Dirac, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Demuestre que $\|f * \rho_\nu - f\|_1 \to 0$ cuando $\nu \to \infty$.