Examen parcial I. Variante 1 (demostrativa) Análisis III

$\boxed{1}$ Sean X, Y espacios métricos (no necesariamente completos), $f_n\colon X \to Y$, $x_0 \in X$. Enuncie y demuestre el teorema sobre el cambio de los límites:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

$\boxed{2}$ Dada sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n},$$

calcule la función límite g y cheque si se tiene lugar la convergencia uniforme.

$\boxed{3}$ Escriba las definiciones:

- La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon X \to \mathbb{C}$, converge uniformemente a la función $g\colon X \to \mathbb{C}$.
- La integral impropia $\int_{\to -\infty}^{b} f(x,y)\,dx$ converge a $\Phi(y)$ uniformemente con respecto al parámetro y en Y.
- Función B (definición integral para argumentos positivos).

$\boxed{4}$ Demuestre que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ no converge.

$\boxed{5}$ Calcule la integral usando las funciones Γ y B:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{\alpha} x\,dx, \qquad |\alpha| < 1.$$

$\boxed{6}$ Demuestre el siguiente teorema. Sean X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, Y un espacio métrico, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces la función $\Phi\colon Y \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(y) = \int_X f(x,y)\,dx$$

es continua en Y. Indicación: demuestre que

$$\forall y_0 \in Y \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \forall y \in U(y_0,\delta) \quad |f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon.$$