Convergencia casi uniforme (un tema del curso "Análisis real")

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

20 de mayo de 2021

Objetivos:

demostrar el criterio de convergencia casi uniforme en términos de los conjuntos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X\colon \; |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}, \qquad B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n).$$

Luego demostrar el teorema de Egorov.

Prerrequsitos:

criterios de la convergencia puntual y uniforme en términos de los conjuntos auxiliares,

propiedad decreciente de $B(\varepsilon, k)$ respecto a ambas variables,

propiedad σ-subaditiva de medida,

teorema sobre la medida de la intersección de una sucesión decreciente.

Plan

Plan

Definición de los conjuntos auxiliares

Sean X un conjunto, $f_n \colon X \to \mathbb{C}$ para cada n en $\mathbb{N}$, $g \colon X \to \mathbb{C}$.

Definimos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X \colon \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k),$$

$$D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon).$$

Convergencia de una sucesión de funciones en un punto

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Convergencia de una sucesión de funciones en un punto

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \qquad \iff$$

Convergencia de una sucesión de funciones en un punto

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

Convergencia de una sucesión de funciones en un punto

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \qquad x \in \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n)$$

Convergencia de una sucesión de funciones en un punto

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \iff \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

$$\iff x \in \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n) \iff x \in D.$$

Convergencia de una sucesión de funciones en un punto

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x) \iff \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

$$\iff x \in \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A(\varepsilon, n) \iff x \in D.$$

Proposición (D es el conjunto de no convergencia)

$$\{x \in X : \ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x)\} = D.$$

Convergencia puntual

Definición de la convergencia puntual:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x).$$

Convergencia puntual

Definición de la convergencia puntual:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \forall x \in X \qquad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x).$$

Escribimos lo mismo con 4 cuantificadores:

Convergencia puntual

Definición de la convergencia puntual:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x).$$

Escribimos lo mismo con 4 cuantificadores:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Convergencia puntual

Definición de la convergencia puntual:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \forall x \in X \qquad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x).$$

Escribimos lo mismo con 4 cuantificadores:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Proposición (convergencia puntual en términos del conjunto D)

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \Longleftrightarrow$$

Convergencia puntual

Definición de la convergencia puntual:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \forall x \in X \qquad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x).$$

Escribimos lo mismo con 4 cuantificadores:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Proposición (convergencia puntual en términos del conjunto D)

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad D = \varnothing.$$

Convergencia uniforme

Definición:

$$f \xrightarrow[\longrightarrow]{X} g \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Convergencia uniforme

Definición:

$$f \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Proposición (criterio de la convergencia uniforme en términos de la seminorma-supremo)

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)| = 0.$$

Convergencia uniforme en términos de $B(\varepsilon, k)$

Proposición (criterio de convergencia uniforme)

$$f \xrightarrow[]{X} g \qquad \Longleftrightarrow$$

Convergencia uniforme en términos de $B(\varepsilon, k)$

Proposición (criterio de convergencia uniforme)

$$f \xrightarrow[]{X} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

Convergencia uniforme en términos de $B(\varepsilon, k)$

Proposición (criterio de convergencia uniforme)

$$f \overset{X}{\rightrightarrows} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

Proposición (criterio de convergencia uniforme fuera de un conjunto)

$$f \overset{X \setminus Y}{\rightrightarrows} g \qquad \Longleftrightarrow$$

Convergencia uniforme en términos de $B(\varepsilon, k)$

Proposición (criterio de convergencia uniforme)

$$f \xrightarrow{X} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, k) = \varnothing.$$

Proposición (criterio de convergencia uniforme fuera de un conjunto)

$$f \xrightarrow{X \setminus Y} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, k) \subseteq Y.$$

Monotonía de los conjuntos auxiliares

Proposición (para ε fijo, $B(\varepsilon, k)$ decrece respecto a k)

Si $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$B(\varepsilon, k+1) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

Monotonía de los conjuntos auxiliares

Proposición (para ε fijo, $B(\varepsilon, k)$ decrece respecto a k)

Si $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$B(\varepsilon, k+1) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

Proposición ($A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$ decrecen respecto a ε)

Si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $n, k \in \mathbb{N}$, entonces

$$A(\varepsilon_2, n) \subseteq A(\varepsilon_1, n), \qquad B(\varepsilon_2, k) \subseteq B(\varepsilon_1, k), \qquad C(\varepsilon_2) \subseteq C(\varepsilon_1).$$

Monotonía de los conjuntos auxiliares

Proposición (para ε fijo, $B(\varepsilon, k)$ decrece respecto a k)

Si $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$B(\varepsilon, k+1) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

Proposición ($A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$ decrecen respecto a ε)

Si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $n, k \in \mathbb{N}$, entonces

$$A(\varepsilon_2, n) \subseteq A(\varepsilon_1, n), \qquad B(\varepsilon_2, k) \subseteq B(\varepsilon_1, k), \qquad C(\varepsilon_2) \subseteq C(\varepsilon_1).$$

Proposición (D se escribe como una unión numerable)

$$D = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C(1/m).$$

Trabajemos con funciones medibles

Ahora supongamos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida, $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n, y $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Trabajemos con funciones medibles

Ahora supongamos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida, $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n, y $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Entonces las funciones $h_n := |f_n - g|$ son $\mathcal{F}$-medibles.

Trabajemos con funciones medibles

Ahora supongamos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida, $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n, y $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Entonces las funciones $h_n := |f_n - g|$ son $\mathcal{F}$-medibles.

$$A(\varepsilon, n) = \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = h^{-1}\big[\,[\varepsilon, +\infty[\,\big].$$

Trabajemos con funciones medibles

Ahora supongamos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida, $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n, y $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Entonces las funciones $h_n := |f_n - g|$ son $\mathcal{F}$-medibles.

$$A(\varepsilon, n) = \{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = h^{-1}\big[\,[\varepsilon, +\infty[\,\big].$$

El intervalo $[\varepsilon, +\infty[$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, por eso es Borel-medible en $\mathbb{R}$, y

$$A(\varepsilon, n) \in \mathcal{F}.$$

Trabajemos con funciones medibles

Ahora supongamos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida, $f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ para cada n, y $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Entonces las funciones $h_n := |f_n - g|$ son $\mathcal{F}$-medibles.

$$A(\varepsilon, n) = \{x \in X:\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = h^{-1}\big[\,[\varepsilon, +\infty[\,\big].$$

El intervalo $[\varepsilon, +\infty[$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, por eso es Borel-medible en $\mathbb{R}$, y

$$A(\varepsilon, n) \in \mathcal{F}.$$

La σ-álgebra $\mathcal{F}$ es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables, luego todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$, D pertenecen a $\mathcal{F}$.

Convergencia casi en todas partes

Definición:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g \qquad \overset{\text{def}}{\iff} \qquad \mu(\{x \in X \colon f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x)\}) = 0.$$

En otras palabras,

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g \qquad \iff \qquad \mu(D) = 0.$$

Ejercicios

Ejercicio.
Demostrar que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, usando las definiciones con 4 cuantificadores.

Ejercicio.
Demostrar que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, razonando en términos de $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$ y D.

Ejercicio.
Recordar algún ejemplo, cuando $f_n \xrightarrow{X} g$, pero no se tiene $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Ejercicios

Ejercicio.

Explicar por qué la convergencia puntual implica la convergencia μ-c.t.p.

Ejercicio.

Dar un ejemplo cuando $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-c.t.p.}} g$, pero $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\not\longrightarrow}} g$.

Plan

Convergencia casi uniforme

Igual que antes, suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida, y las funciones $f_n \colon X \to \mathbb{C}$, $g \colon X \to \mathbb{C}$ son $\mathcal{F}$-medibles.

Convergencia casi uniforme

Igual que antes, suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida, y las funciones $f_n\colon X \to \mathbb{C}$, $g\colon X \to \mathbb{C}$ son $\mathcal{F}$-medibles.

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \qquad \overset{\text{def}}{\iff} \qquad \forall \eta > 0 \qquad \exists E \in \mathcal{F} \qquad \left(\mu(E) < \eta \qquad \wedge \qquad f_n \xrightarrow{X \setminus E} g\right).$$

Convergencia casi uniforme

Igual que antes, suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida, y las funciones $f_n\colon X \to \mathbb{C}$, $g\colon X \to \mathbb{C}$ son $\mathcal{F}$-medibles.

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \forall \eta > 0 \qquad \exists E \in \mathcal{F} \qquad \Big(\mu(E) < \eta \qquad \wedge \qquad f_n \xrightarrow{X \setminus E} g\Big).$$

Dmitri Egorov (1869–1931), se pronuncia [iegórof].

Algunos de los alumnos: Pavel Alexandrov, Nikolai Luzin.

Criterio de convergencia casi uniforme en términos de $B(\varepsilon, k)$

Teorema

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Es el resultado principal de esta unidad del curso.

Demostración: la necesidad

$\Longrightarrow$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Demostración: la necesidad

$\Longrightarrow$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que $\lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0$, esto es,

Demostración: la necesidad

$\Longrightarrow$. Supongamos que $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0$, esto es,

$$\forall \eta > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall k \geq m \qquad \mu(B(\varepsilon, k)) < \eta.$$

Demostración: la necesidad

$\Longrightarrow$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que $\lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0$, esto es,

$$\forall \eta > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall k \geq m \qquad \mu(B(\varepsilon, k)) < \eta.$$

Sea $\eta > 0$. Utilizando la suposición $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$ encontramos E en $\mathcal{F}$ tal que

Demostración: la necesidad

$\Longrightarrow$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0$, esto es,

$$\forall \eta > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall k \geq m \qquad \mu(B(\varepsilon, k)) < \eta.$$

Sea $\eta > 0$. Utilizando la suposición $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$ encontramos E en $\mathcal{F}$ tal que

$$\mu(E) < \eta \qquad \text{y} \qquad f_n \overset{X\setminus E}{\Longrightarrow} g.$$

Demostración: la necesidad

$\Longrightarrow$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0$, esto es,

$$\forall \eta > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall k \geq m \qquad \mu(B(\varepsilon, k)) < \eta.$$

Sea $\eta > 0$. Utilizando la suposición $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$ encontramos E en $\mathcal{F}$ tal que

$$\mu(E) < \eta \qquad \text{y} \qquad f_n \xrightarrow{X\setminus E} g.$$

Por el criterio de $f_n \xrightarrow{X\setminus E} g$,

Demostración: la necesidad

$\Longrightarrow$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que $\lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0$, esto es,

$$\forall \eta > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall k \geq m \qquad \mu(B(\varepsilon, k)) < \eta.$$

Sea $\eta > 0$. Utilizando la suposición $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$ encontramos E en $\mathcal{F}$ tal que

$$\mu(E) < \eta \qquad \text{y} \qquad f_n \xrightarrow{X\setminus E} g.$$

Por el criterio de $f_n \xrightarrow{X\setminus E} g$, encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que $B(\varepsilon, m) \subseteq E$.

Demostración: la necesidad

$\Longrightarrow$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos demostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0$, esto es,

$$\forall \eta > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad \forall k \geq m \qquad \mu(B(\varepsilon, k)) < \eta.$$

Sea $\eta > 0$. Utilizando la suposición $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$ encontramos E en $\mathcal{F}$ tal que

$$\mu(E) < \eta \qquad \text{y} \qquad f_n \xrightarrow{X\setminus E} g.$$

Por el criterio de $f_n \xrightarrow{X\setminus E} g$, encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que $B(\varepsilon, m) \subseteq E$.

Si $\quad k \geq m, \quad$ entonces $\quad B(\varepsilon, k) \subseteq B(\varepsilon, m) \quad$ y $\quad \mu(B(\varepsilon, k)) \leq \mu(E) < \eta$.

Demostración de la suficiencia, inicio

$\Longleftarrow$. Supongamos que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{k \to \infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Demostración de la suficiencia, inicio

$\Longleftarrow$. Supongamos que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Esto significa que

Demostración de la suficiencia, inicio

$\Longleftarrow$. Supongamos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists K(\varepsilon, \delta) \quad \mu(B(\varepsilon, K(\varepsilon, \delta))) < \delta.$$

Demostración de la suficiencia, inicio

$\Longleftarrow$. Supongamos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists K(\varepsilon, \delta) \quad \mu(B(\varepsilon, K(\varepsilon, \delta))) < \delta.$$

Sea $\eta > 0$. Vamos a construir un conjunto $E \in \mathcal{F}$ tal que

Demostración de la suficiencia, inicio

$\Longleftarrow$. Supongamos que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists K(\varepsilon, \delta) \quad \mu(B(\varepsilon, K(\varepsilon, \delta))) < \delta.$$

Sea $\eta > 0$. Vamos a construir un conjunto $E \in \mathcal{F}$ tal que

$$\mu(E) < \eta \qquad \wedge \qquad f_n \xrightarrow{X\setminus E} g.$$

Demostración de la suficiencia, inicio

$\Longleftarrow$. Supongamos que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists K(\varepsilon,\delta) \quad \mu(B(\varepsilon, K(\varepsilon,\delta))) < \delta.$$

Sea $\eta > 0$. Vamos a construir un conjunto $E \in \mathcal{F}$ tal que

$$\mu(E) < \eta \qquad \wedge \qquad f_n \xrightarrow{X\setminus E} g.$$

Idea: construir el conjunto E como la unión de ciertos $B(\varepsilon, K(\varepsilon,\delta))$.

Demostración de la suficiencia, construcción principal

Sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists K(\varepsilon, \delta) \quad \mu(B(\varepsilon, K(\varepsilon, \delta))) < \delta. \tag{1}$$

Demostración de la suficiencia, construcción principal

Sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists K(\varepsilon, \delta) \quad \mu(B(\varepsilon, K(\varepsilon, \delta))) < \delta. \tag{1}$$

Sea $\eta > 0$. Aplicamos (1) con $\boxed{\varepsilon = \dfrac{1}{p}}$ y $\boxed{\delta = \dfrac{\eta}{2^p}}$. Obtenemos

$$k_p := K\left(\frac{1}{p}, \frac{\eta}{2^p}\right) \qquad \text{tal que} \qquad \mu(B(1/p, k_p)) < \frac{\eta}{2^p}.$$

Pongamos

$$\boxed{E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).}$$

Demostración de la suficiencia, cota superior para la medida de E

$$k_p := K\left(\frac{1}{p}, \frac{\eta}{2^p}\right), \qquad \mu(B(1/p, k_p)) < \frac{\eta}{2^p}, \qquad E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Demostración de la suficiencia, cota superior para la medida de E

$$k_p := K\left(\frac{1}{p}, \frac{\eta}{2^p}\right), \qquad \mu(B(1/p, k_p)) < \frac{\eta}{2^p}, \qquad E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Demostremos que $\mu(E) < \eta$.

Usamos la propiedad subaditiva de μ:

$$\mu(E) \leq$$

Demostración de la suficiencia, cota superior para la medida de E

$$k_p := K\left(\frac{1}{p}, \frac{\eta}{2^p}\right), \qquad \mu(B(1/p, k_p)) < \frac{\eta}{2^p}, \qquad E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Demostremos que $\mu(E) < \eta$.

Usamos la propiedad subaditiva de μ:

$$\mu(E) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \mu(B(1/p, k_p)) <$$

Demostración de la suficiencia, cota superior para la medida de E

$$k_p := K\left(\frac{1}{p}, \frac{\eta}{2^p}\right), \qquad \mu(B(1/p, k_p)) < \frac{\eta}{2^p}, \qquad E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Demostremos que $\mu(E) < \eta$.

Usamos la propiedad subaditiva de μ:

$$\mu(E) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \mu(B(1/p, k_p)) < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^p} =$$

Demostración de la suficiencia, cota superior para la medida de E

$$k_p := K\left(\frac{1}{p}, \frac{\eta}{2^p}\right), \qquad \mu(B(1/p, k_p)) < \frac{\eta}{2^p}, \qquad E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Demostremos que $\mu(E) < \eta$.

Usamos la propiedad subaditiva de μ:

$$\mu(E) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \mu(B(1/p, k_p)) < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^p} = \eta.$$

Demostración de la suficiencia, convergencia uniforme fuera de E

$$E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Vamos a demostrar que $f_n \xrightarrow[]{X \setminus E} g$, usando el criterio que probamos antes:

$$f_n \xrightarrow[]{X \setminus E} g \qquad \iff$$

Demostración de la suficiencia, convergencia uniforme fuera de E

$$E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Vamos a demostrar que $f_n \xrightarrow{X \setminus E} g$, usando el criterio que probamos antes:

$$f_n \xrightarrow{X \setminus E} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, m) \subseteq E.$$

Demostración de la suficiencia, convergencia uniforme fuera de E

$$E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Vamos a demostrar que $f_n \xrightarrow{X \setminus E} g$, usando el criterio que probamos antes:

$$f_n \xrightarrow{X \setminus E} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, m) \subseteq E.$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración de la suficiencia, convergencia uniforme fuera de E

$$E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Vamos a demostrar que $f_n \xrightarrow{X \setminus E} g$, usando el criterio que probamos antes:

$$f_n \xrightarrow{X \setminus E} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, m) \subseteq E.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos un p en $\mathbb{N}$ con $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Entonces

Demostración de la suficiencia, convergencia uniforme fuera de E

$$E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Vamos a demostrar que $f_n \xrightarrow{X\setminus E} g$, usando el criterio que probamos antes:

$$f_n \xrightarrow{X\setminus E} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, m) \subseteq E.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos un p en $\mathbb{N}$ con $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Entonces

$$B(\varepsilon, k_p) \subseteq$$

Demostración de la suficiencia, convergencia uniforme fuera de E

$$E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Vamos a demostrar que $f_n \xrightarrow[]{X\setminus E} g$, usando el criterio que probamos antes:

$$f_n \xrightarrow[]{X\setminus E} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\varepsilon > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, m) \subseteq E.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos un p en $\mathbb{N}$ con $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Entonces

$$B(\varepsilon, k_p) \subseteq B(1/p, k_p) \subseteq$$

Demostración de la suficiencia, convergencia uniforme fuera de E

$$E := \bigcup_{p=1}^{\infty} B(1/p, k_p).$$

Vamos a demostrar que $f_n \xrightarrow{X\setminus E} g$, usando el criterio que probamos antes:

$$f_n \xrightarrow{X\setminus E} g \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists m \in \mathbb{N} \qquad B(\varepsilon, m) \subseteq E.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos un p en $\mathbb{N}$ con $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Entonces

$$B(\varepsilon, k_p) \subseteq B(1/p, k_p) \subseteq E.$$

Con esto se termina la demostración del teorema.

Plan

Proposición (la convergencia casi uniforme implica la convergencia c.t.p.)

Supongamos que $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Proposición (la convergencia casi uniforme implica la convergencia c.t.p.)

Supongamos que $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $C(\varepsilon) \subseteq B(\varepsilon, k)$,

Proposición (la convergencia casi uniforme implica la convergencia c.t.p.)

Supongamos que $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $C(\varepsilon) \subseteq B(\varepsilon, k)$, luego

Proposición (la convergencia casi uniforme implica la convergencia c.t.p.)

Supongamos que $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $C(\varepsilon) \subseteq B(\varepsilon, k)$, luego

$$\mu(C(\varepsilon)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Proposición (la convergencia casi uniforme implica la convergencia c.t.p.)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $C(\varepsilon) \subseteq B(\varepsilon, k)$, luego

$$\mu(C(\varepsilon)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Pasando al límite cuando $k \to \infty$, concluimos que

Proposición (la convergencia casi uniforme implica la convergencia c.t.p.)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $C(\varepsilon) \subseteq B(\varepsilon, k)$, luego

$$\mu(C(\varepsilon)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Pasando al límite cuando $k \to \infty$, concluimos que $\mu(C(\varepsilon)) = 0$.

Proposición (la convergencia casi uniforme implica la convergencia c.t.p.)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $C(\varepsilon) \subseteq B(\varepsilon, k)$, luego

$$\mu(C(\varepsilon)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Pasando al límite cuando $k \to \infty$, concluimos que $\mu(C(\varepsilon)) = 0$.

Escribimos D como una unión numerable y usamos la propiedad subaditiva de μ:

$$\mu(D) =$$

Proposición (la convergencia casi uniforme implica la convergencia c.t.p.)

Supongamos que $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $C(\varepsilon) \subseteq B(\varepsilon, k)$, luego

$$\mu(C(\varepsilon)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Pasando al límite cuando $k \to \infty$, concluimos que $\mu(C(\varepsilon)) = 0$.

Escribimos D como una unión numerable y usamos la propiedad subaditiva de μ:

$$\mu(D) = \mu\left(\bigcup_{q=1}^{\infty} C(1/q)\right) \leq$$

Proposición (la convergencia casi uniforme implica la convergencia c.t.p.)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $C(\varepsilon) \subseteq B(\varepsilon, k)$, luego

$$\mu(C(\varepsilon)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Pasando al límite cuando $k \to \infty$, concluimos que $\mu(C(\varepsilon)) = 0$.
Escribimos D como una unión numerable y usamos la propiedad subaditiva de μ:

$$\mu(D) = \mu\left(\bigcup_{q=1}^{\infty} C(1/q)\right) \leq \sum_{q=1}^{\infty} \mu(C(1/q)) =$$

Proposición (la convergencia casi uniforme implica la convergencia c.t.p.)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada k en $\mathbb{N}$, tenemos $C(\varepsilon) \subseteq B(\varepsilon, k)$, luego

$$\mu(C(\varepsilon)) \le \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Pasando al límite cuando $k \to \infty$, concluimos que $\mu(C(\varepsilon)) = 0$.

Escribimos D como una unión numerable y usamos la propiedad subaditiva de μ:

$$\mu(D) = \mu\left(\bigcup_{q=1}^{\infty} C(1/q)\right) \le \sum_{q=1}^{\infty} \mu(C(1/q)) = 0. \qquad \square$$

Teorema (de Egorov)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ y $\mu(X) < +\infty$. Entonces $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Teorema (de Egorov)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ y $\mu(X) < +\infty$. Entonces $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Demostración. La suposición $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que

Teorema (de Egorov)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ y $\mu(X) < +\infty$. Entonces $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Demostración. La suposición $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(D) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $C(\varepsilon) \subseteq D$, tenemos

Teorema (de Egorov)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ y $\mu(X) < +\infty$. Entonces $f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\Longrightarrow} g$.

Demostración. La suposición $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(D) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $C(\varepsilon) \subseteq D$, tenemos $\mu(C(\varepsilon)) = 0$. Recordamos que

$$C(\varepsilon) =$$

Teorema (de Egorov)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ y $\mu(X) < +\infty$. Entonces $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Demostración. La suposición $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(D) = 0$.
Sea $\varepsilon > 0$. Como $C(\varepsilon) \subseteq D$, tenemos $\mu(C(\varepsilon)) = 0$. Recordamos que

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k).$$

Como la sucesión $(B(\varepsilon, k))_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $\mu(X) < +\infty$,

Teorema (de Egorov)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ y $\mu(X) < +\infty$. Entonces $f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\Longrightarrow} g$.

Demostración. La suposición $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(D) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $C(\varepsilon) \subseteq D$, tenemos $\mu(C(\varepsilon)) = 0$. Recordamos que

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(\varepsilon, k).$$

Como la sucesión $(B(\varepsilon, k))_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $\mu(X) < +\infty$,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B(\varepsilon, k)) =$$

Teorema (de Egorov)

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ y $\mu(X) < +\infty$. Entonces $f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\Longrightarrow} g$.

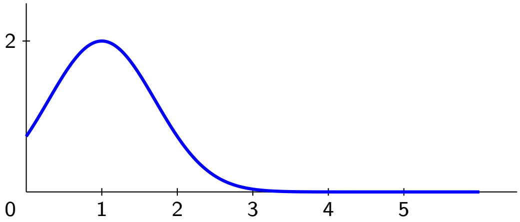
Demostración. La suposición $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(D) = 0$.
Sea $\varepsilon > 0$. Como $C(\varepsilon) \subseteq D$, tenemos $\mu(C(\varepsilon)) = 0$. Recordamos que

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k).$$

Como la sucesión $(B(\varepsilon, k))_{k \in \mathbb{N}}$ es decreciente y $\mu(X) < +\infty$,

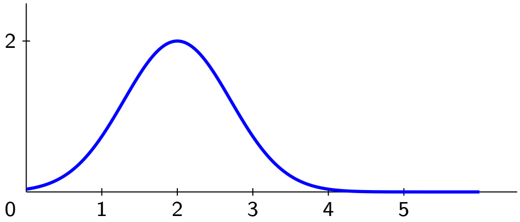
$$\lim_{k \to \infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = \mu(C(\varepsilon)) = 0. \qquad \square$$

Contraejemplo con $\mu(X) = +\infty$



Sean $X = [0, +\infty)$,
$f_n(x) = \exp(-(x-n)^2)$,
$g(x) = 0$.

Contraejemplo con $\mu(X) = +\infty$

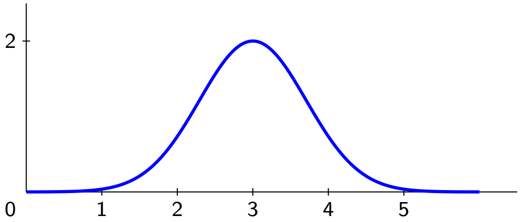


Sean $X = [0, +\infty)$,

$f_n(x) = \exp(-(x-n)^2)$,

$g(x) = 0$.

Contraejemplo con $\mu(X) = +\infty$

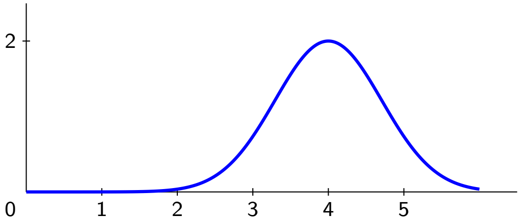


Sean $X = [0, +\infty)$,

$f_n(x) = \exp(-(x-n)^2)$,

$g(x) = 0$.

Contraejemplo con $\mu(X) = +\infty$

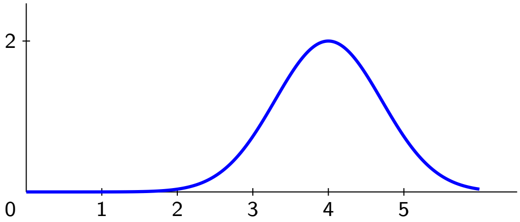


Sean $X = [0, +\infty)$,

$f_n(x) = \exp(-(x-n)^2)$,

$g(x) = 0$.

Contraejemplo con $\mu(X) = +\infty$



Sean $X = [0, +\infty)$,

$f_n(x) = \exp(-(x-n)^2)$,

$g(x) = 0$.

Entonces $f_n \xrightarrow{X} g$,

pero no se cumple $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Ejercicios

Ejercicio. Demostrar que si $f_n \xrightarrow{X} g$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Ejercicios

Ejercicio. Demostrar que si $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$, entonces $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Ejercicio. Demostrar que si $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$, entonces $f_n \overset{\mu}{\rightharpoonup} g$.

Recordemos que, por definición,

$$f_n \overset{\mu}{\rightharpoonup} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = 0.$$

Hemos estudiado el concepto de la convergencia casi uniforme (de Egórov).

Es uno de varios modos de convergencia.