Funciones iguales en casi todas partes (un tema del curso “Análisis Real”)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas, México

15 de junio de 2021

Plan

Plan

Objetivos:

- estudiar el concepto de funciones iguales casi en todas partes;
- demostrar que ciertas propiedades de las integrales implican igualdades de funciones c.t.p.

Objetivos:

- estudiar el concepto de funciones iguales casi en todas partes;
- demostrar que ciertas propiedades de las integrales implican igualdades de funciones c.t.p.

Prerrequisitos:

- medida, propiedad subaditiva de la medida;
- integración de funciones positivas, reales y complejas;
- desigualdad de Márkov;
- la parte real e imaginaria de una función compleja;
- la parte positiva y negativa de una función real.

Unión numerable de conjuntos de medida cero, repaso

En este tema suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

Proposición

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mu(A_n) = 0.$$

Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0.$$

Casi en todas partes

Definición

Sea $P\colon X \to \{0,1\}$ un predicado. Se dice que P se cumple μ-c.t.p., si

$$\mu\left(\left\{x \in X\colon\ \neg P(x)\right\}\right) = 0.$$

Funciones iguales μ-c.t.p.

En lo que sigue, Y es uno de los conjuntos $[0, +\infty]$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Funciones iguales μ-c.t.p.

En lo que sigue, Y es uno de los conjuntos $[0, +\infty]$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$. Se dice que f y g son iguales casi en todas partes respecto a μ, si

$$\mu\left(\left\{x \in X \colon f(x) \neq g(x)\right\}\right) = 0.$$

Funciones iguales μ-c.t.p.

En lo que sigue, Y es uno de los conjuntos $[0, +\infty]$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$. Se dice que f y g son iguales casi en todas partes respecto a μ, si

$$\mu\left(\left\{x \in X \colon f(x) \neq g(x)\right\}\right) = 0.$$

Notación: $\quad f \overset{\mu}{\sim} g \quad$ o $\quad f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g.$

El conjunto de no coincidencia

Definición

Sean $f, g \colon X \to Y$.

$$N_{f,g} := \{x \in X \colon \ f(x) \neq g(x)\}.$$

El conjunto de no coincidencia

Definición

Sean $f, g\colon X \to Y$.

$$N_{f,g} := \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\}.$$

Ejercicio. Mostrar que

$$N_{f,f} = \varnothing, \qquad N_{g,f} = N_{f,g}.$$

Demostrar que para cualesquiera $f, g, h\colon X \to Y$ se cumple la contención

$$N_{f,g} \subseteq N_{f,h} \cup N_{h,g}.$$

La igualdad μ-c.t.p. es una relación de equivalencia

Ejercicio. Demostrar que la relación binaria $\overset{\mu}{\sim}$ en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$ es una relación de equivalencia.

La igualdad μ-c.t.p. es una relación de equivalencia

Ejercicio. Demostrar que la relación binaria $\stackrel{\mu}{\sim}$ en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$ es una relación de equivalencia.

Sugerencia: usar los resultados del ejercicio anterior sobre el conjunto $N_{f,g}$.

La igualdad μ-c.t.p. y las operaciones aritméticas

Ejercicio. Sean $f, g, u, v \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Supongamos que

$$f \overset{\mu}{\sim} g, \qquad u \overset{\mu}{\sim} v.$$

Demostrar que

$$f + u \overset{\mu}{\sim} g + v, \qquad f\,u \overset{\mu}{\sim} g\,v, \qquad \lambda f \overset{\mu}{\sim} \lambda g.$$

Plan

Integrales de funciones iguales casi en todas partes

En la siguiente proposición Y es uno de los conjuntos $[0, +\infty]$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Integrales de funciones iguales casi en todas partes

En la siguiente proposición Y es uno de los conjuntos $[0, +\infty]$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$ tales que $f \overset{\mu}{\sim} g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración, inicio

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\}.$$

Demostración, inicio

$$E \ := \ \{x \in X\colon \ f(x) = g(x)\}, \qquad N \ := \ N_{f,g} = \{x \in X\colon \ f(x) \neq g(x)\}.$$

La suposición $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que

Demostración, inicio

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\}.$$

La suposición $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(N) = 0$.

Demostración, inicio

$$E \;:=\; \{x \in X\colon\; f(x) = g(x)\}, \qquad N \;:=\; N_{f,g} = \{x \in X\colon\; f(x) \neq g(x)\}.$$

La suposición $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} g$ significa que $\mu(N) = 0$. Luego

Demostración, inicio

$$E := \{x \in X \colon \ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X \colon \ f(x) \neq g(x)\}.$$

La suposición $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(N) = 0$. Luego

$$\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostración, inicio

$$E \;:=\; \{x \in X\colon\; f(x) = g(x)\}, \qquad N \;:=\; N_{f,g} = \{x \in X\colon\; f(x) \ne g(x)\}.$$

La suposición $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(N) = 0$. Luego

$$\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Además,

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_N,$$

Demostración, inicio

$$E \;:=\; \{x \in X\colon\; f(x) = g(x)\}, \qquad N \;:=\; N_{f,g} = \{x \in X\colon\; f(x) \neq g(x)\}.$$

La suposición $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(N) = 0$. Luego

$$\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Además,

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_N, \quad f =$$

Demostración, inicio

$$E \;:=\; \{x \in X:\;\; f(x) = g(x)\}, \qquad N \;:=\; N_{f,g} = \{x \in X:\;\; f(x) \neq g(x)\}.$$

La suposición $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(N) = 0$. Luego

$$\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Además,

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_N, \quad f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f,$$

Demostración, inicio

$$E \;:=\; \{x \in X\colon\;\; f(x) = g(x)\}, \qquad N \;:=\; N_{f,g} = \{x \in X\colon\;\; f(x) \neq g(x)\}.$$

La suposición $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(N) = 0$. Luego

$$\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Además,

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_N, \quad f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g =$$

Demostración, inicio

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\}.$$

La suposición $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} g$ significa que $\mu(N) = 0$. Luego

$$\int_N f \, \mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_N g \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Además,

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_N, \quad f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g,$$

Demostración, inicio

$$E \;:=\; \{x \in X\colon\; f(x) = g(x)\}, \qquad N \;:=\; N_{f,g} = \{x \in X\colon\; f(x) \neq g(x)\}.$$

La suposición $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} g$ significa que $\mu(N) = 0$. Luego

$$\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Además,

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_N, \quad f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g,$$

$$\mathbb{1}_E f = \mathbb{1}_E g.$$

Demostración, inicio

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\}.$$

La suposición $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} g$ significa que $\mu(N) = 0$. Luego

$$\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Además,

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_N, \quad f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g,$$

$$\mathbb{1}_E f = \mathbb{1}_E g.$$

Para demostrar la última igualdad,

Demostración, inicio

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\}.$$

La suposición $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} g$ significa que $\mu(N) = 0$. Luego

$$\int_N f \, \mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_N g \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Además,

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_N, \quad f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g,$$

$$\mathbb{1}_E f = \mathbb{1}_E g.$$

Para demostrar la última igualdad, considerar dos casos: 1) $x \in E$; 2) $x \in N$.

Demostración, final

Usamos la siguiente notación y las propiedades que ya vimos:

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\},$$

$$\int_X \mathbb{1}_N f \,\mathrm{d}\mu = \int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_X \mathbb{1}_N g \,\mathrm{d}\mu \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

$$f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g, \qquad \mathbb{1}_E f = \mathbb{1}_E g.$$

Demostración, final

Usamos la siguiente notación y las propiedades que ya vimos:

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\},$$

$$\int_X \mathbb{1}_N f \,\mathrm{d}\mu = \int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_X \mathbb{1}_N g \,\mathrm{d}\mu \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

$$f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g, \qquad \mathbb{1}_E f = \mathbb{1}_E g.$$

Luego, por la propiedad aditiva de la integral,

Demostración, final

Usamos la siguiente notación y las propiedades que ya vimos:

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\},$$

$$\int_X \mathbb{1}_N f \,\mathrm{d}\mu = \int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_X \mathbb{1}_N g \,\mathrm{d}\mu \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

$$f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g, \qquad \mathbb{1}_E f = \mathbb{1}_E g.$$

Luego, por la propiedad aditiva de la integral,

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu =$$

Demostración, final

Usamos la siguiente notación y las propiedades que ya vimos:

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\},$$

$$\int_X \mathbb{1}_N f \,\mathrm{d}\mu = \int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_X \mathbb{1}_N g \,\mathrm{d}\mu \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0,$$
$$f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g, \qquad \mathbb{1}_E f = \mathbb{1}_E g.$$

Luego, por la propiedad aditiva de la integral,

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_X \mathbb{1}_N f \,\mathrm{d}\mu$$

Demostración, final

Usamos la siguiente notación y las propiedades que ya vimos:

$$E := \{x \in X:\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X:\ f(x) \neq g(x)\},$$

$$\int_X \mathbb{1}_N f \,\mathrm{d}\mu = \int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_X \mathbb{1}_N g \,\mathrm{d}\mu \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

$$f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g, \qquad \mathbb{1}_E f = \mathbb{1}_E g.$$

Luego, por la propiedad aditiva de la integral,

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_X \mathbb{1}_N f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \,\mathrm{d}\mu$$

Demostración, final

Usamos la siguiente notación y las propiedades que ya vimos:

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\},$$

$$\int_X \mathbb{1}_N f \, \mathrm{d}\mu = \int_N f \, \mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_X \mathbb{1}_N g \, \mathrm{d}\mu \int_N g \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

$$f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g, \qquad \mathbb{1}_E f = \mathbb{1}_E g.$$

Luego, por la propiedad aditiva de la integral,

$$\begin{aligned} \int_X f \, \mathrm{d}\mu &= \int_X \mathbb{1}_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_X \mathbb{1}_N f \, \mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X \mathbb{1}_E g \, \mathrm{d}\mu = \end{aligned}$$

Demostración, final

Usamos la siguiente notación y las propiedades que ya vimos:

$$E := \{x \in X\colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\},$$

$$\int_X \mathbb{1}_N f \,\mathrm{d}\mu = \int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_X \mathbb{1}_N g \,\mathrm{d}\mu \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

$$f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g, \qquad \mathbb{1}_E f = \mathbb{1}_E g.$$

Luego, por la propiedad aditiva de la integral,

$$\begin{aligned} \int_X f \,\mathrm{d}\mu &= \int_X \mathbb{1}_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_X \mathbb{1}_N f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_X \mathbb{1}_E g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E g \,\mathrm{d}\mu + \int_X \mathbb{1}_N g \,\mathrm{d}\mu = \end{aligned}$$

Demostración, final

Usamos la siguiente notación y las propiedades que ya vimos:

$$E := \{x \in X \colon\ f(x) = g(x)\}, \qquad N := N_{f,g} = \{x \in X \colon\ f(x) \neq g(x)\},$$

$$\int_X \mathbb{1}_N f \,\mathrm{d}\mu = \int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0, \qquad \int_X \mathbb{1}_N g \,\mathrm{d}\mu \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

$$f = \mathbb{1}_E f + \mathbb{1}_N f, \qquad g = \mathbb{1}_E g + \mathbb{1}_N g, \qquad \mathbb{1}_E f = \mathbb{1}_E g.$$

Luego, por la propiedad aditiva de la integral,

$$\begin{aligned}\int_X f \,\mathrm{d}\mu &= \int_X \mathbb{1}_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_X \mathbb{1}_N f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_X \mathbb{1}_E g \,\mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E g \,\mathrm{d}\mu + \int_X \mathbb{1}_N g \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces $f < +\infty$ c.t.p., esto es,

$$\mu(\{x \in X : \ f(x) = +\infty\}) = 0.$$

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $Y \in \mathcal{F}$ tales que

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostrar que $f = 0$ casi en todas partes de Y, esto es,

$$\mu\big(\{x \in Y\colon\ f(x) > 0\}\big) = 0.$$

Sugerencias:

- considerar los conjuntos $\quad A_v := \{x \in Y\colon\ f(x) \geq v\}$,
- aplicar la desigualdad de Márkov a la función $\mathbb{1}_Y f$,
- usar la igualdad $\quad (0, +\infty] = \bigcup_{p=1}^{\infty} [1/p, +\infty].$

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tal que

$$\forall Y \in \mathcal{F} \qquad \int_Y f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostrar que $f \overset{\mu}{\sim} 0$.

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ tal que

$$\forall Y \in \mathcal{F} \qquad \int_Y f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostrar que $f \overset{\mu}{\sim} 0$.

Sugerencia. Elegir Y de manera astuta, para poder aplicar el resultado del ejercicio anterior sobre las funciones positivas.

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Supongamos que

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| = \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostrar que existe un α en $\mathbb{C}$ tal que $\alpha f \overset{\mu}{\sim} |f|$.

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Supongamos que

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| = \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostrar que existe un α en $\mathbb{C}$ tal que $\alpha f \overset{\mu}{\sim} |f|$.

Sugerencias:

- recordar la demostración de la desigualdad

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

- suponiendo que $\alpha f \overset{\mu}{\sim} |f|$, expresar α en términos de las integrales de f y $|f|$.
- definir α por la receta del inciso anterior y demostrar que $\alpha f \overset{\mu}{\sim} |f|$.

Micro-tarea adicional. Sea $\mu(X) < +\infty$, sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y sea S un conjunto cerrado en $\mathbb{C}$.

Para cada Y en $\mathcal{F}$ con $\mu(Y) > 0$ pongamos

$$A_Y(f) = \frac{1}{\mu(Y)} \int_Y f \, d\mu.$$

Supongamos que $A_Y(f) \in S$ para cada $Y \in \mathcal{F}$ con $\mu(Y) > 0$.

Demostrar que $f(x) \in S$ para casi todos $x \in X$.