Puntos de acumulación de una sucesión

Objetivos. Estudiar el concepto de puntos de acumulación de una sucesión. Describir este concepto de varias maneras equivalentes.

Prerrequisitos. Sucesión, subsucesión, límite de sucesión.

En este curso trabajamos con espacios métricos. El concepto de puntos de acumulación de una sucesión (o de una red) tiene sentido también en espacios topológicos.

Denotamos por $\tau(a)$ al conjunto de las vecindades abiertas del punto a, es decir, el conjunto de los conjuntos abiertos que contienen el punto a.

1 Definición (punto de acumulación de una sucesión)**.** Sean X un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $a \in X$. Se dice que a es un *punto de acumulación* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para cualquier V en $\tau(a)$ y para cada m en $\mathbb{N}$ existe un n en $\mathbb{N}$ tal que $n \geq m$ y $x_n \in V$.

2 Ejemplo. En el espacio $\mathbb{R}$ consideremos la sucesión $x_n = (-1)^n$. Los puntos -1 y 1 son sus puntos de acumulación.

3 Ejemplo. En el espacio $\mathbb{R}$ consideremos la sucesión

$$x_n = (-1)^n \, \frac{n}{n+1}.$$

Los puntos -1 y 1 son sus puntos de acumulación.

4 Proposición (criterio del punto de acumulación de una sucesión)**.** *Sean X un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $a \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) a es un punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, esto es,

$$\forall V \in \tau(a) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq m \quad x_n \in V;$$

(b) para cada V en $\tau(a)$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N}\colon\ x_n \in V\}$ es infinito;

(c) para cada m en $\mathbb{N}$, $a \in \operatorname{cl}(\{x_n\colon\ n \geq m\})$;

(d) existe una función creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge al punto a.

Demostración. Supongamos (a) y demostremos (b). Sea $V \in \tau(a)$. Pongamos $J \coloneqq \{n \in \mathbb{N}\colon\ x_n \in V\}$. Por la condición (a), para cada m en $\mathbb{N}$ existe $n \geq m$ tal que $n \in J$. Esto signficia que el conjunto J no es acotado. Se sabe que un subconjunto de $\mathbb{N}$ es finito si, y solo si, es acotado. Por lo tanto, J es infinito.

Supongamos (b) y demostremos (a). Sea $V \in \tau(a)$. Pongamos $J \coloneqq \{n \in \mathbb{N}\colon\ x_n \in V\}$. Por la condición (b), el conjunto J es infinito. Por eso J no es acotado. Esto implica que para cada m en $\mathbb{N}$ existe n en J tal que $n \geq m$.

Supongamos (a) y demostremos (c). La idea es cambiar el orden de los cuantificadores "$\forall m \in \mathbb{N}$" y "$\forall V \in \tau(a)$". Sea $m \in \mathbb{N}$. Dada V en $\tau(a)$, por la condición (a) existe $n \geq m$ tal que $x_n \in V$. Esto significa que $a \in \operatorname{cl}(\{x_n\colon\ n \geq m\})$.

Supongamos (c) y demostremos (d). Construyamos ν de manera inductiva. Para cada p en $\mathbb{N}$ elegimos $\nu(p)$ de tal manera que $\nu(p) > \nu(p-1)$ y $d(x_{\nu(p)}, a) < 1/p$. Entonces ν es creciente y $\lim_{k\to\infty} x_{\nu(k)} = a$.

Supongamos (d) y demostremos (a). Sea $V \in \tau(a)$ y sea $m \in \mathbb{N}$. Encontramos q en $\mathbb{N}$ tal que para cada $p \geq q$ se cumple $x_{\nu(q)} \in V$. Pongamos $n = \nu(\max\{m, q\})$. Entonces $n \geq m$ y $x_n \in V$. $\square$