Series de Fourier absolutamente convergentes

Objetivos. Estudiar las propiedades principales de series de Fourier absolutamente convergentes.

Ya hemos mostrado que los caracteres del grupo $\mathbb{Z}$ se pueden identificar con elementos de $\mathbb{R}_{2\pi}$, y que los elementos de $\mathbb{Z}$ se pueden identificar con caracteres del grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$ (todavía no hemos mostrado que esta correspondencia es suprayectiva).

En vez de trabajar con funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}_{2\pi}$, vamos a trabajar con funciones 2π-periódicas definidas en $\mathbb{R}$.

Definición 1 (funciones básicas de Fourier)**.** Sea $k \in \mathbb{Z}$. Denotemos por φ_k a la función $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_k(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Lema 2 (la exponencial imaginaria menos uno)**.** *Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1\right| \le |x|. \tag{1}$$

Demostración. Primero, notamos que

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1\right| = \left((\cos(x)-1)^2 + \operatorname{sen}(x)^2\right)^{1/2} = \left(2 - 2\cos(x)\right)^{1/2} = \left(4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)^{1/2} = \left|2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|.$$

Otra manera de verlo:

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1\right| = \left|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,x}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,x}{2}}\right)\right| = \left|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,x}{2}}\ 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right| = \left|2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|.$$

Luego aplicamos la desigualdad conocida $|\operatorname{sen}(t)| \le |t|$ que se cumple para cada número real t:

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1\right| = \left|2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right| \le |x|. \qquad \square$$

Proposición 3 (propiedades elementales de las funciones básicas de Fourier)**.** *Sea $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $\varphi_k \in C_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$.*

Demostración. De la identidad $\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}} = 1$ se sigue que φ_k es 2π-periódica. La función exp es entera (analítica en todo el plano) y, por consecuencia, continua. También podemos demostrar directamente que φ_k es Lipschitz-continua, usando el Lema 2:

$$|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k(x-y)} - 1\right| \le k|x-y|. \qquad \square$$

Lema 4 (sobre el promedio de la función básica de Fourier)**.** *Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,mx}\,dx = \delta_{m,0}.$$

Demostración. Si $m = 0$, entonces la función bajo el signo de la integral es la constante 1, y su integral es 2π. Si $m \neq 0$, entonces la función $\frac{1}{m\,\mathrm{i}}\varphi_m$ es una antiderivada de φ_m, pero los valores de esta función en los puntos 0 y 2π coinciden. $\square$

Proposición 5 (ortonormalidad de las funciones básicas de Fourier)**.** *Sean* $p, q \in \mathbb{Z}$. *Entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,px}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,qx}\;dx = \delta_{p,q}.$$

Demostración. Se obtiene del Lema 4 aplicado con $m = q - p$. $\square$

Definición 6 (la serie de Fourier asociada a una sucesión absolutamente sumable)**.** Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Definimos la función $\breve{a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\breve{a}(x) \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,. \tag{2}$$

Otra notación: en vez de $\breve{a}$, podemos escribir $F_{\mathbb{Z}}a$.

Proposición 7 (sobre la función definida como una serie de Fourier absolutamente convergente)**.** *Sea* $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. *Entonces* $\breve{a} \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, *y las componentes de la sucesión original se pueden expresar en términos de la función* $\breve{a}$ *de la siguiente manera: para cada* k *en* $\mathbb{Z}$,

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\breve{a}(x)\,dx. \tag{3}$$

Demostración. I. Para cada n en $\mathbb{N}_0$, denotemos por A_n a la siguiente suma parcial:

$$A_n(x) \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \sum_{k=-n}^{k} a_k\varphi_k(x).$$

De la Proposición 3 se sigue que que $A_n \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Notamos que el k-ésimo sumando en la serie (2) tiene valor absoluto $|a_k|$:

$$\left|a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\right| = |a_k|.$$

Como la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|$ converge, por el teorema de Weierstrass la serie (2) converge uniformemente, es decir, la sucesión $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ tiende uniformemente a la función $\breve{a}$, y la función $\breve{a}$ es continua.

II. Para cada x en $\mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$A_n(x + 2\pi) = A_n(x).$$

Pasando al límite cuando n tiende a infinito, obtenemos que $\breve{a}(x + 2\pi) = \breve{a}(x)$.

III. Sea $p \in \mathbb{Z}$. Como la sucesión de las funciones A_n converge uniformemente a $\breve{a}$ y las funcion $\overline{\varphi_p}$ es acotada, la sucesión de las funciones $\overline{\varphi_p} A_n$ converge uniformemente a la función $\overline{\varphi_p}\breve{a}$. Entonces la integral de la última función es el límite de las integrales:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \breve{a}(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, px}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} A_n(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, px}\, dx.$$

Sustituimos la definición de A_n y aplicamos la Proposición 5:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \breve{a}(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, px}\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{a_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, kx}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, px}\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k \delta_{k,p}.$$

La suma $\sum_{k=-n}^{n} a_k \delta_{k,p}$ es igual a a_p para cada n tal que $n \ge p$, luego el límite es a_p. $\square$

Definición 8 (coeficientes de Fourier de una función 2π-periódica absolutamente integrable)**.** Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Definimos la sucesión $\widehat{f}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, kx} f(x)\, dx.$$

Definición 9 (la transformada de Fourier del grupo $\mathbb{Z}$)**.** Definimos $F_{\mathbb{Z}}\colon \ell^1(\mathbb{Z}) \to L^\infty_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$F_{\mathbb{Z}} a := \breve{a}.$$

Definición 10 (la transformada de Fourier del grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$)**.** Definimos $F_{\mathbb{R}_{2\pi}}\colon L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ mediante la regla

$$F_{\mathbb{R}_{2\pi}} f := \widehat{f}.$$

Recordamos que si $1 \le p < q \le +\infty$, entonces $\ell^p(\mathbb{Z}) \subsetneq \ell^q(\mathbb{Z})$. En particular,

$$\ell^1(\mathbb{Z}) \subsetneq \ell^2(\mathbb{Z}) \subsetneq \ell^\infty(\mathbb{Z}).$$

Recordamos que

$$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \subsetneq L^\infty_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \subsetneq L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) \subsetneq L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}).$$

Dada una sucesión a de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$, podemos primero aplicar $F_{\mathbb{Z}}$, es decir, calcular la serie de Fourier $\breve{a}$. La función obtenida es de clase $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y, por consecuencia, de clase $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces está bien definida la expresión $F_{\mathbb{R}_{2\pi}}\breve{a}$, y la fórmula (3) se puede escribir como

$$F_{\mathbb{R}_{2\pi}} F_{\mathbb{Z}} a = a.$$

La composición $F_{\mathbb{Z}} F_{\mathbb{R}_{2\pi}}$ no está definida en todo el espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, y la situación con esta composición es mucho más complicada.

Proposición 11 (la fórmula de reciprocidad de Fourier para series de Fourier absolutamente convergentes)**.** *Sean* $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ *y* $g \in L^1_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$*. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \breve{a}(x)\, g(x)\, dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \widehat{g}_{-k} \tag{4}$$

Demostración. Multiplicamos ambos lados de la igualdad (2) por $g(x)$:

$$\breve{a}(x) g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, kx}\,.$$

Notamos que las sumas parciales en el lado derecho están acotados por una función integrable:

$$|A_n(x) g(x)| = \left| \sum_{k=-n}^{n} a_k g(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, kx} \right| \le \|a\|_1\, |g(x)|.$$

Entonces por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \breve{a}(x) g(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{a_k}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, kx}\; dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k g_{-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g_{-k}. \qquad \square$$

Proposición 12 (la identidad de Parseval para series de Fourier absolutamente convergentes)**.** *Sea* $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$*. Entonces*

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\breve{a}(x)|^2\, dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2. \tag{5}$$

Series de Fourier que convergen rápidamente

Usando el teorema de Lebesgue sobre la convergencia dominada (u otros teoremas de análisis real) se puede demostrar el siguiente resultado general.

Proposición 13 (sobre la derivación de la serie término a término, sin demostración)**.** *Sea* D *un intervalo de* $\mathbb{R}$*,* $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ *una sucesión de funciones* $D \to \mathbb{C}$*, derivables en* D*. Supongamos que*

- *para cada* x *en* D *la serie* $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k(x)|$ *converge,*
- *existe una sucesión* $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ *de clase* $\ell^1(\mathbb{Z})$ *tal que* $|f_k'(x)| \le b_k$ *para cada* x *en* D *y cada* k *en* $\mathbb{Z}$*.*

Entonces la función $g(x) \coloneqq \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(x)$ *es derivable, y*

$$g'(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k'(x).$$

Proposición 14. *Sea a una sucesión tal que*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |ka_k| < +\infty.$$

Entonces la función $\check{a}$ *es continuamente derivable, y*

$$\check{a}'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}\, k a_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, kx}\,. \tag{6}$$

Demostración. I. Aplicamos la proposición sobre la derivación de la serie término a término. Notamos que

$$|a_k \varphi_k'(x)| = |ka_k|.$$

II. Para demostrar que la función $\check{a}'$ es continua, aplicamos la Proposición 7 a la sucesión $(\mathrm{i}\, ka_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. □