Funciones absolutamente continuas

1. Definición (función absolutamente continua). Una función $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se llama *absolutamente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia finita $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ de subintervalos disjuntos de $[a,b]$ tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_i) < \delta$ se cumple la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| < \varepsilon.$$

Denotemos por $\mathrm{AC}[a,b]$ al conjunto de todas funciones absolutamente continuas en $[a,b]$.

2. $\mathrm{AC}[a,b] \subseteq C[a,b]$.

Idea de la demostración. Sea $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. Mostraremos que F es uniformemente continua en $[a,b]$. Para un $\varepsilon > 0$ encontramos un $\delta > 0$ como en la definición de AC. Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $0 < x_2 - x_1 < \delta$. Consideramos la familia de un intervalo $((c_1, d_1))$, donde $c_1 = x_1$ y $d_1 = x_2$. $\square$

3. Integrales indefinidas son funciones absolutamente continuas. Sea $f \in L^1[a,b]$. Supongamos que F está relacionada con f mediante la regla

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

Entonces $F \in \mathrm{AC}[a,b]$.

Demostración. Esta afirmación se sigue de la continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que para cada X medible con $\mu(X) < +\infty$, se tiene que $\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$. Si $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$, entonces pongamos $X = \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$. $\square$

4. $\mathrm{AC}[a,b]$ es un espacio vectorial.

5. Teorema. $\mathrm{AC}[a,b] \subseteq \mathrm{BV}[a,b]$.

Demostración. Para $\varepsilon = 1$ encontremos $\delta > 0$ como en la definición de AC. Pongamos

$$K = 1 + \left\lfloor \frac{b-a}{\delta} \right\rfloor.$$

Sea τ una partición de $[a,b]$. Denotemos por τ' a la partición que se obtiene de τ al agregar (cuando no pertenecen a τ) los puntos

$$a + j\,\frac{b-a}{K} \qquad (j = 1, \ldots, K-1).$$

Numeramos los elementos de τ' con subíndices dobles de tal manera que

$$y_{j,0} = a + \frac{(j-1)(b-a)}{K} < y_{j,1} < \ldots < y_{j,m_j} = a + \frac{j(b-a)}{K} = y_{j+1,0}.$$

Entonces en cada grupo la suma de las longitudes de los intervalos es $\frac{b-a}{K} < \delta$, y por la elección de δ obtenemos

$$\sum_{s=1}^{m_j} |f(y_{j,s}) - f(y_{j,s-1})| \le 1.$$

Luego

$$S_{\text{abs}}(f,\tau) \le S_{\text{abs}}(f,\tau') \le K.$$

Pasando al supremos sobre τ obtenemos que $\operatorname{Var}_a^b(f) \le K$. $\square$

6. Corolario. Sea $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. Entonces F es derivable c.t.p.

7. Lema. Sea $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. Supongamos que $F' = 0$ c.t.p. Entonces F es una constante.

Demostración. Elijamos c en $(a,b]$. Queremos demostrar que $F(c) = F(a)$. Sea $A \subset (a,c)$ tal que $\mu(A) = c - a$ y $F'(x) = 0$ para todo x en A.

Sean $\eta > 0$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Encontramos δ como en la definición de la continuidad absoluta de F. Por la definición de la derivada, para todo x en A existe un $\rho_x > 0$ tal que $x + \rho_x < b$ y para cada y en $(x, x+\rho_x)$ se cumple que $|f(y) - f(x)| \le \eta(y-x)$. La colección $\mathcal{V} = \{[x,y]\colon\ x \in A,\ y \in (x, x+\rho_x)\}$ es una cubierta de Vitali de A. Apliquemos el lema de Vitali con δ y elijamos una lista finita $([x_k,y_k])_{k=1}^m$ de intervalos disjuntos pertenecientes a $\mathcal{V}$, tal que

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^m [x_k, y_k]\right) < \delta.$$

Podemos suponer que $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Pongamos $y_0 = a$, $x_{m+1} = c$. Luego

$$a = y_0 \le x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_m < y_m \le x_{m+1} = c.$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^m (x_{k+1} - y_k) < \delta.$$

Por la elección de δ,

$$\sum_{k=0}^m |F(x_{k+1}) - F(y_k)| < \varepsilon.$$

Por otra parte,

$$\sum_{k=1}^m |F(y_k) - F(x_k)| \le \eta \sum_{k=1}^m (y_k - x_k) \le \eta(c-a).$$

Luego

$$|F(c) - F(a)| \le \sum_{k=0}^{m} |F(x_{k+1}) - F(y_k)| + \sum_{k=1}^{m} |F(y_k) - F(x_k)| \le \varepsilon + \eta(c-a).$$

Como ε y η son arbitrarios, $F(c) = F(a)$. $\square$

8. Observación. El resultado del lema no siempre se cumple para funciones de clase $\mathrm{BV}[a,b]$.

9. Teorema (cada función absolutamente continua es la integral indefinida de su derivada). Sea $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. Entonces

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Demostración. Como $F \in \mathrm{BV}[a,b]$, F se puede escribir como diferencia de dos funciones crecientes $F = F_1 - F_2$. De ahí $|F'(x)| \le F_1'(x) + F_2'(x)$, y por el teorema de la derivada de una función monótona

$$\int_a^b |F'(x)|\,\mathrm{d}x \le F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a).$$

Esto demuestra que F' es integrable. Consideremos

$$G(x) \coloneqq F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad H \coloneqq F - G.$$

Entonces $G \in \mathrm{AC}[a,b]$ y $H \in \mathrm{AC}[a,b]$. El teorema sobre la derivada de la integral indefinida (el primer teorema de cálculo) dice que $G'(x) = F'(x)$ c.t.p. Por eso $H'(x) = 0$ c.t.p., y por el lema anterior H es una constanta. Tenemos $H(x) = H(a) = 0$ para todo x en $[a,b]$, y $F = G$. $\square$

10. Teorema (criterio de una función absolutamente continua). Una función F es una integral indefinida $\iff$ F es absolutamente continua.

11. Ejercicio. Sea $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. Entonces

$$\mathrm{Var}_a^b(F) = \int_a^b |F'(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{PVar}_a^b(F) = \int_a^b (F'(t))^+\,\mathrm{d}t.$$

12. Ejercicio. Sea $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. Entonces F es acotada en $[a,b]$.

13. Ejercicio. Sean $F, G \in \mathrm{AC}[a, b]$. Entonces $FG \in \mathrm{AC}[a, b]$.

14. Ejercicio. Sean $F, G \in \mathrm{AC}[a, b]$, y $G'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces $F/G \in \mathrm{AC}[a, b]$.

15. Tarea adicional (escalera de Cantor). Explicar la construcción de la escalera de Cantor. La escalera de Cantor es continua y monótona (por eso es también de variación acotada), pero no es absolutamente continua.

16. Ejercicio (criterio de condición de Lipschitz). Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f \in \mathrm{Lip}[a, b]$ (satisface una condición de Lipschitz);

(b) $f \in \mathrm{AC}[a, b]$ y $f' \in L^\infty$.

17. Definición (función singular). Una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ se llama *singular* si es creciente y continua, $f' = 0$ c.t.p. en $[a, b]$ y $f(b) > f(a)$.

18. Ejercicio. Cada función creciente es la suma de una función absolutamente continua y una función singular.

19. Tarea adicional (signo de interrogación de Minkowski). Explicar la construcción y las propiedades de la función singular que se llama *signo de interrogación de Minkowski* (Minkowski's question mark function).