Funciones absolutamente continuas

Definición. Una función $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se llama *absolutamente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia $\{(a_i, b_i)\}$ de intervalos disjuntos en $[a,b]$ tales que $\sum_{k=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ se cumple la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

Denotemos por $\mathrm{AC}[a,b]$ al conjunto de todas funciones absolutamente continuas en $[a,b]$.

1. $\mathrm{AC}[a,b] \subseteq C[a,b]$.

Idea de la demostración. Mostraremos que F es uniformemente continua en $[a,b]$. Para un $\varepsilon > 0$ encontramos un $\delta > 0$ como en la definición de AC. Entonces para $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $0 < x_2 - x_1 < \delta$ consideremos $a_1 = x_1$, $b_1 = x_2$. □

2. Sean $f \in L^1[a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Entonces $F \in \mathrm{AC}[a,b]$.

3. $\mathrm{AC}[a,b]$ es un espacio vectorial.

4. Teorema. $\mathrm{AC}[a,b] \subseteq \mathrm{BV}[a,b]$.

Demostración. Para $\varepsilon = 1$ encontremos $\delta > 0$ como en la definición de AC.

Sea τ una partición de $[a,b]$. Si es necesario, añadimos a τ unos puntos de partición en tal manera que todos los segmentos de la partición nueva τ' sean menores que δ.

Los segmentos de la partición τ' se pueden unir en conjuntos $C_1, \ldots, C_m$ tales que $\lambda(C_k) < \delta$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$ y $\lambda(C_k) \geq \frac{\delta}{2}$ para todo $k \in \{1, \ldots, m-1\}$. (Cuando cada uno de dos conjuntos tiene medida $< \frac{\delta}{2}$, podemos unirlos.) Entonces

$$b - a = \lambda([a,b]) \geq \sum_{k=1}^{m-1} \lambda(C_k) \geq \frac{(m-1)\delta}{2}.$$

De ahí $m \leq \frac{2(b-a)}{\delta} + 1$.

Ahora

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) \leq S_{\mathrm{abs}}(f,\tau') \leq \varepsilon \cdot m \leq \varepsilon\left(\frac{2(b-a)}{\delta} + 1\right).$$

Esto muestra que $\mathrm{Var}_a^b(f) < +\infty$. □

5. Corolario. Sea $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. Entonces F es derivable c.t.p.

6. Lema. Sea $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. Supongamos que $F' = 0$ c.t.p. Entonces F es una constante.

Demostración. Elijamos $c \in (a,b]$. Nuestro objetivo consiste en mostrar que $F(c) = F(a)$.

Sea $A \subset (a,c)$ tal que $\lambda(A) = c - a$ y $F'(x) = 0$ para todo $x \in [a,c]$.

Elijamos números arbitrarios positivos $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$. Sea $\delta > 0$ como en la definición de AC. Por la definición de la derivada, para todo $x \in A$ existe un $y > x$ que $f(y) - f(x) \leq \eta(y - x)$.

Los intervalos $[x,y]$ de este tipo forman una cubierta de Vitali de A. Por el lema de Vitali, existe una familia finita $\{[x_k, y_k]\}_{k=1}^m$ de intervalos disjuntos tales que $\sum_{k=1}^m (y_k - x_k) > c - a - \delta$.

Pongamos $y_0 = a$, $x_{n+1} = c$ y consideremos la partición

$$a = y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_m < y_m < x_{n+1} = c.$$

Tenemos que

$$|F(c) - F(a)| \leq \sum_{k=1}^{n} |F(y_k) - F(x_k)| + \sum_{k=0}^{n} |F(x_{k+1}) - F(y_k)| \leq \eta(c - a) + \varepsilon.$$

Como η y ε eran arbitrarios, $F(c) = F(a)$. □

7. Teorema (una función absolutamente continua es la integral indefinida de su derivada). Sea $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. Entonces $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$.

Demostración. $F \in \mathrm{BV}[a,b]$, F se puede escribir como diferencia de dos funciones crecientes $F = F_1 - F_2$. De ahí

$$|F'(x)| \leq F_1'(x) + F_2'(x),$$

y

$$\int_a^b |F'(x)|\,dx \leq F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a)$$

por el teorema sobre la derivada de una función monótona. Esto demuestra que F' es integrable.

Consideremos

$$G(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt.$$

Entonces $G \in \mathrm{AC}[a,b]$ y $H := F - G \in \mathrm{AC}[a,b]$. Teorema sobre la derivada de la integral indefinida dice que $G'(x) = F'(x)$ c.t.p. Por eso $H'(x) = 0$ c.t.p., y por el lema anterior H es una constanta. $H(x) = H(a) = 0$ para todo $x \in [a,b]$, y $F = G$. □

8. Teorema (criterio de una función absolutamente continua). Una función F es una integral indefinida $\iff$ F es absolutamente continua.

9. Ejercicio. Sea $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. Entonces

$$\mathrm{Var}_a^b(F) = \int_a^b |F'(t)|\,dt, \qquad \mathrm{PVar}_a^b(F) = \int_a^b (F'(t))^+\,dt.$$

10. Ejercicio. Sea $F \in \mathrm{AC}[a,b]$. Entonces F es acotada en $[a,b]$.

11. Ejercicio. Sean $F, G \in \mathrm{AC}[a,b]$. Entonces $FG \in \mathrm{AC}[a,b]$.

12. Ejercicio. Sean $F, G \in \mathrm{AC}[a,b]$, y $G'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces $F/G \in \mathrm{AC}[a,b]$.

13. Ejercicio (escalera de Cantor). La escalera de Cantor es continua y monótona (por eso es también de variación acotada), pero no es absolutamente continua.

14. Ejercicio (criterio de condición de Lipschitz). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f \in \mathrm{Lip}[a,b]$ (satisface una condición de Lipschitz);

(b) $f \in \mathrm{AC}[a,b]$ y $f' \in L^\infty$.

Definición (función singular). Una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se llama *singular* si es creciente y continua, $f' = 0$ c.t.p. en $[a,b]$ y $f(b) > f(a)$.

15. Ejercicio. Cada función creciente es la suma de una función absolutamente continua y una función singular.

16. Tarea adicional (signo de interrogación de Minkowski). Explicar la construcción y las propiedades de la función singular que se llama *signo de interrogación de Minkowski* (Minkowski's question mark function).