Desigualdad de Young

Objetivos. Demostrar la desigualdad de Young usando la convexidad de la función exponencial. Estudiar el caso de igualdad en la desigualdad de Young.

Requisitos. Funciones convexas, criterio de función convexa en términos de su segunda derivada, la segunda derivada y funciones estríctamente convexas.

Aplicaciones. Desigualdad de Hölder.

En este tema denotamos por $\exp_{\mathbb{R}}$ a la función exponencial restringida al eje real:

$$\exp_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp_{\mathbb{R}}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

1 Proposición (convexidad de la función exponencial)**.** *La función* $\exp_{\mathbb{R}}$ *es convexa, esto es, para cualesquiera* $\alpha, \beta \geq 0$ *con* $\alpha + \beta = 1$*, se cumple la desigualdad*

$$\exp_{\mathbb{R}}(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \exp_{\mathbb{R}}(x) + \beta \exp_{\mathbb{R}}(y). \tag{1}$$

Demostración. La segunda derivada de $\exp_{\mathbb{R}}$ es estrictamente positiva en cada punto:

$$\exp_{\mathbb{R}}''(x) = \exp_{\mathbb{R}}(x) > 0.$$

Por el criterio de funciones convexas, concluimos que $\exp_{\mathbb{R}}$ es convexa. □

2 Definición (exponentes conjugados)**.** Dos números $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se llaman *exponentes conjugados*. Otro nombre adecuado sería *exponentes complementarios*.

3 Proposición (criterio de exponentes conjugados)**.** *Sean* $p, q > 1$*. Entonces*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (p-1)q = p \qquad \Longleftrightarrow \qquad (q-1)p = q.$$

4 Proposición (desigualdad de Young)**.** *Sean* $p, q > 1$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, y sean* $a, b \geq 0$*. Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2}$$

Demostración. Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces el lado izquierdo de la desigualdad (2) es 0, mientras al lado derecho es no negativo, y la desigualdad se cumple.

Sean $a > 0$ y $b > 0$. Entonces (2) se obtiene de (1) al hacer el siguiente cambio de variables:

$$\alpha = \frac{1}{p}, \qquad \beta = \frac{1}{q}, \qquad x = p\ln(a), \qquad y = q\ln(b).$$ □

El caso de igualdad en la desigualdad de Young

5 Proposición (convexidad estricta de la función exponencial)**.** *La función* $\exp_{\mathbb{R}}$ *es estrictamente convexa, esto es, para cualesquiera* x, y *en* $\mathbb{R}$ *con* $x \neq y$ *y cualesquiera* $\alpha, \beta > 0$ *con* $\alpha + \beta = 1$*, se cumple la desigualdad*

$$\exp_{\mathbb{R}}(\alpha x + \beta y) < \alpha \exp_{\mathbb{R}}(x) + \beta \exp_{\mathbb{R}}(y). \tag{3}$$

Demostración. Se sigue del criterio de funciones estrictamente convexas en términos de la segunda derivada. □

6 Proposición (criterio de igualdad en la desigualdad de Young)**.** *Sean* $p, q > 1$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, y sean* $a, b \geq 0$*. Demostrar que*

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^p = b^q. \tag{4}$$

Demostración. Si $a^p = b^q$, entonces

$$a^{p-1} = \left(a^p\right)^{\frac{p-1}{p}} = \left(b^q\right)^{\frac{1}{q}} = b,$$

luego

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} = a^p = a \cdot a^{p-1} = ab.$$

Ahora supongamos que $a^p \neq b^q$. Pongamos

$$x \coloneqq \ln(a^p), \qquad y \coloneqq \ln(b^q).$$

Entonces $x \neq y$,

$$x = p\,\ln(a), \qquad y = q\,\ln(b).$$

Aplicamos (3) con estos x, y y con $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$. Obtenemos que

$$ab = \exp_{\mathbb{R}}(\ln(a) + \ln(b)) = \exp_{\mathbb{R}}\big(\alpha x + \beta y\big) < \alpha \exp_{\mathbb{R}}(x) + \beta \exp_{\mathbb{R}}(y) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$ □

7 Tarea adicional. Encontrar otras demostraciones de la desigualdad de Young y del criterio de igualdad en la desigualdad de Young (Proposiciones 4 y 6).