Lema de Vitali sobre cubiertas

Empezamos la unidad “Derivación e integración”. Vamos a tratar las siguientes preguntas:

- ¿Cuándo $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \displaystyle\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y = f(x)$?

  Respuesta: c.t.p., si f es integrable.

- ¿Cuándo $\displaystyle\int_a^x F'(y)\,\mathrm{d}y = F(x) - F(a)$ para todo x?

  Respuesta: cuando F es absolutamente continua.

Una de las herramientas principales en este estudio será el lema de Vitali.

En estos apuntes usamos el signo $\subset$ en el sentido no estricto. Denotemos por μ a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, y por μ^* a la medida exterior asociada a μ (notemos que μ^* coincide con la medida exterior asociada a la premedida definida como la longitud de los intervalos).

1. Definición (cubierta de Vitali de un conjunto). Sean $X \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{V} \subset 2^{\mathbb{R}}$. Se dice que $\mathcal{V}$ es una *cubierta de Vitali de* X, si:

1) los elementos de $\mathcal{V}$ son intervalos no triviales, es decir, para cada A en $\mathcal{V}$, A es un intervalo de $\mathbb{R}$ y $\mu(A) > 0$;

2) para cada x en X y cada $\varepsilon > 0$ existe A en $\mathcal{V}$ tal que $x \in A$ y $\mu(A) < \varepsilon$.

2. Observación. La condición 2) se puede sustituir por la siguiente condición equivalente: para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ tal que $X \subset \cup\mathcal{W}$ y los elementos de $\mathcal{W}$ son intervalos de longitud menor que ε.

3. Ejemplo: intervalos con extremos racionales. $\mathcal{V} \coloneqq \{(a,b)\colon a,b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$. Entonces $\mathcal{V}$ es una cubierta de Vitali de $\mathbb{R}$.

4. Lema. Sean $X \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{V}$ una cubierta de Vitali de X, F un conjunto cerrado y $x \in X \setminus F$. Entonces existe A en $\mathcal{V}$ tal que $x \in A$ y $A \cap F = \varnothing$.

Demostración. Pongamos $\delta = d(x, F)$. Como $x \notin F$ y $F = \operatorname{cl}(F)$, tenemos $x \notin \operatorname{cl}(F)$, así que $\delta > 0$. Usando la definición de la cubierta de Vitali, encontramos A en $\mathcal{V}$ tal que $x \in A$ y $\mu(A) < \delta$. Entonces A está contenido en $(x - \delta, x + \delta)$ y por lo tanto $A \cap F = \varnothing$. $\square$

5. El lema de Vitali sobre cubiertas de Vitali. Sean $X \subset \mathbb{R}$, $\mu^*(X) < +\infty$, $\mathcal{V}$ una cubierta de Vitali de X, $\varepsilon > 0$. Entonces existe una lista finita $A_1, \ldots, A_n$ de elementos de $\mathcal{V}$ tal que $A_1, \ldots, A_n$ son disjuntos a pares y

$$\mu^*\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) < \varepsilon.$$

Demostración. 1. Es suficiente demostrar el lema para el caso cuando todos los elementos de $\mathcal{V}$ son intervalos cerrados. En efecto, sustituyendo cada elemento de $\mathcal{V}$ por su cerradura, obtenemos una cubierta de Vitali, y los elementos no cambian su medida.

2. Usando la suposición que $\mu^*(X) < +\infty$ encontramos un conjunto abierto Y tal que $X \subset Y$ y $\mu(Y) < +\infty$. Es fácil verificar (ejericio) que $\{A \in \mathcal{V} \colon A \subset Y\}$ es una cubierta de Vitali de X. En lo que sigue, vamos a trabajar solamente con los elementos de $\mathcal{V}$ contenidos en Y. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A \subset Y$ para todo A en $\mathcal{V}$.

3. Vamos a construir intervalos A_k, $k \in \mathbb{N}$, de manera "ávida" ("ansiosa"). Construimos por inducción una sucesión de números, $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, y dos sucesiones de conjuntos, $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ y $(U_k)_{k=1}^{\infty}$. Sean $U_0 \coloneqq \varnothing$,

- $\lambda_k \coloneqq \sup\{\mu(A) \colon A \in \mathcal{V},\ A \cap U_{k-1} = \varnothing\}$;
- $A_k \in \mathcal{V}$ se elige de tal manera que $A_k \cap U_{k-1} = \varnothing$ y $\mu(A_k) > \frac{1}{2}\lambda_k$;
- $U_k \coloneqq U_{k-1} \cup A_k = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} A_j$.

Si en algún paso $A \subset U_{k-1}$, entonces ya tenemos la conclusión del lema. Si X no está contenido en U_{k-1}, entonces por el Lema 4 obtenemos $\{A \in \mathcal{V} \colon\ A \cap U_{k-1} = \varnothing\} \neq \varnothing$, y el proceso se puede continuar.

4. Por construcción, $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(A_k) = \mu(U_k) \le \mu(Y).$$

Por eso la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$ converge. Elijamos n tal que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) < \frac{\varepsilon}{5}$, y demostremos que la lista $A_1, \ldots, A_n$ satisface la conclusión del lema. Hay que mostrar que $\mu^*(X \setminus U_n) < \varepsilon$. Para eso, vamos a probar que $X \setminus U_n \subset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} J_k$, donde J_k es el intervalo con el mismo centro c_k que A_k, pero con $\mu(J_k) = 5\mu(A_k)$.

5. Sea $x \in X \setminus U_n$. Usando el Lema 4 elegimos B en $\mathcal{V}$ tal que $x \in B$ y $B \cap U_n = \varnothing$. Mostremos que si k es suficientemente grande, entonces B intersecta con U_k. Para todo k en $\mathbb{N}$, si $B \cap U_k = \varnothing$, entonces por definición de λ_k tenemos que $\lambda_{k+1} \ge \mu(B)$. Luego

$$\mu(B) \le \lambda_{k+1} < 2\mu(A_{k+1}).$$

Como $\mu(B) > 0$ y $\mu(A_{k+1}) \to 0$ cuando $k \to \infty$, la desigualdad $\mu(B) < 2\mu(A_{k+1})$ no puede ser cierta para todo k. Sea k el mínimo índice tal que $B \cap U_k \neq \varnothing$. Entonces $B \cap U_{k-1} = \varnothing$ y $B \cap A_k \neq \varnothing$. Sea $y \in B \cap A_k$. Notemos que $k > n$, $\mu(B) \le \lambda_k \le 2\mu(A_k)$,

$$|x - c_k| \le |x - y| + |y - c_k| \le \mu(B) + \frac{1}{2}\mu(A_k) \le \frac{5}{2}\mu(A_k) = \frac{1}{2}\mu(J_k).$$

Por lo tanto $x \in J_k$. Concluimos que $X \setminus U_n \subset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} J_k$ y

$$\mu^*(X \setminus U_n) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(J_k) = 5 \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon. \qquad \square$$