Teorema de convergencia de Vitali

Tarea adicional

Objetivos. Estudiar el concepto de la *integrabilidad uniforme* de un conjunto de funciones y demostrar el teorema de convergencia de Vitali.

Requisitos. Integral y sus propiedades, teorema de Egórov.

Familias de funciones uniformemente integrables

1. Conjunto de funciones uniformemente integrable. Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto de $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Se dice que $\mathcal{C}$ es *uniformemente integrable* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que

$$\sup_{f \in \mathcal{C}} \int\limits_X \chi_{[M,+\infty)} \circ |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

2. Familia de funciones uniformemente integrable. Sea $(f_j)_{j \in J}$ una familia de funciones pertenecientes a $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Se dice que $\mathcal{C}$ es *uniformemente integrable* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que

$$\sup_{j \in J} \int\limits_X \chi_{[M,+\infty)} \circ |f_j| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

3. Ejemplo. Consideremos $[0, 1]$ con la medida de Lebesgue μ. Definimos la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mediante le siguiente regla:

$$f_n = n\chi_{[0,1/n]}.$$

Determine si la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

4. Ejemplo. Consideremos $[0, 1]$ con la medida de Lebesgue μ. Definimos la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mediante le siguiente regla:

$$f_n = \sqrt{n}\chi_{[0,1/n]}.$$

Determine si la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

5. Una familia de funciones dominada por una función integrable es uniformemente integrable. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_j)_{j \in J}$ una familia de funciones en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ dominada por una función integrable h:

1. $h \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$.

2. $|f_n| \leq h$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demuestre que la familia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

Teorema de convergencia de Vitali y su recíproco

6. Teorema de convergencia de Vitali. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita $(\mu(X) < +\infty)$. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que:

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-c.t.p. a una función g.
3. $\mu(\{x \in X\colon\ g(x) = +\infty\}) = 0$.

Entonces $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

7. Teorema recíproco al teorema de convergencia de Vitali. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita $(\mu(X) < +\infty)$. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que para cada $E \in \mathcal{F}$ existe un límite de la sucesión de integrales

$$\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

8. Muestre que en el caso de espacios de medida finita $(\mu(X) < +\infty)$ el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se puede obtener como un corolario del teorema de convergencia de Vitali.