Teorema de Tonelli

Objetivos. Demostrar el teorema de Tonelli. Conocer un contraejemplo que muestra la importancia de la condición que las medidas son σ-finitas.

Requisitos. Definición del producto de medidas.

1 Teorema (sobre las integrales de medidas de secciones de un conjunto medible, repaso)**.** *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas, y sea Q en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Pongamos*

$$\varphi_Q(x) = \nu(Q_x) \qquad (x \in X), \qquad\qquad \psi_Q(y) = \mu(Q^y) \qquad (y \in Y).$$

Entonces $\varphi_Q \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\psi_Q \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$, y

$$\int\limits_X \varphi_Q \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_Y \psi_Q \, \mathrm{d}\nu.$$

2 Definición (producto de medidas, repaso)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas. Para cualquier Q en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ pongamos

$$(\mu \times \nu)(Q) \coloneqq \int\limits_X \nu(Q_x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Por el teorema demostrado anteriormente,

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int\limits_Y \mu(Q^y) \, \mathrm{d}\nu(y).$$

La propiedad σ-aditiva de $\mu \times \nu$, se sigue del teorema sobre la integral de la serie de funciones positivas.

3 Teorema (Tonelli)**.** *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas, y sea $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, [0, +\infty])$. Pongamos*

$$u(x) \coloneqq \int\limits_Y f_x \, \mathrm{d}\nu \qquad (x \in X), \qquad v(y) \coloneqq \int\limits_X f^y \, \mathrm{d}\mu \qquad (y \in Y).$$

Entonces $u \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $v \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$, y

$$\int\limits_X u \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int\limits_Y \psi \, \mathrm{d}\nu.$$

Demostración. 1. Como la función f es $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-medible, sus secciones f_x y f^y son medibles, así que todas las integrales tienen sentido.

2. Supongamos que $Q \in \mathcal{F}\times\mathcal{G}$ y $f = 1_Q$. Entonces

$$f_x(y) = f(x,y) = 1_Q(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x,y)\in Q, \\ 0, & \text{si } (x,y)\notin Q; \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } y\in Q_x, \\ 0, & \text{si } y\notin Q_x; \end{cases} = 1_{Q_x}(y).$$

Por eso

$$u(x) = \int\limits_Y 1_{Q_x}\,\mathrm{d}\nu = \nu(Q_x) = \varphi_Q(x).$$

Usando la definición de la medida $\mu\times\nu$, concluimos que

$$\int\limits_{X\times Y} 1_Q\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = (\mu\times\nu)(Q) = \int\limits_X \nu(Q_x) = \int\limits_X u\,\mathrm{d}\mu.$$

De manera similar, se puede probar que

$$f^y(x) = 1_{Q^y}(x), \qquad v(y) = \int\limits_X 1_{Q^y}\,d\mu = \mu(Q^y).$$

Por el Teorema 1,

$$\mu(Q) = \int\limits_Y \mu(Q^y)\,\mathrm{d}\nu(y),$$

esto es,

$$\int\limits_{X\times Y} 1_Q\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int\limits_X v\,\mathrm{d}\nu.$$

3. Por la propiedad aditiva de la medida y por las propiedades lineales de la integral, la afirmación es cierta también para funciones simples medibles positivas.

4. Consideremos el caso general: $f\in\mathcal{M}(X\times Y,\mathcal{F}\times\mathcal{G},[0,+\infty])$. Escogemos una sucesión creciente $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{SM}(X\times Y,\mathcal{F}\times\mathcal{G},[0,+\infty])$ tal que $s_n\to f$. Pongamos

$$t_n(x) \coloneqq \int\limits_Y (s_n)_x\,\mathrm{d}\nu \qquad (x\in X).$$

De la condición $s_n\le s_{n+1}$ se sigue que $t_n\le t_{n+1}$. Además $(s_n)_x\to f_x$, y por el teorema de la convergencia monótona

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x).$$

Por el inciso 3,

$$\int\limits_X t_n\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X\times Y} s_n\,\mathrm{d}(\mu\times\nu).$$

Pasamos al límite cuando $n\to\infty$ y por el teorema de la convergencia monótona obtenemos el resultado. $\square$

4 Corollary. *Sean* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ *espacios de medidas* σ*-finitas, y sea* $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathbb{C})$. *Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

(a) $$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) < +\infty,$$

(b) $$\int_Y \left(\int_X |f(x,y)| \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) < +\infty,$$

(c) $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mu \times \nu)$.

Demostración. Aplicar el teorema de Tonelli a la función $|f|$. □

5 Ejemplo. Mostremos que es esencial la condición que μ y ν son σ-finitas. Sean $X = Y = [0,1]$, μ es la medida de Lebesgue y ν es la medida de conteo. Aquí la medida ν no es σ-finita. Denotemos por D a la diagonal del cuadrado $[0,1]^2$:

$$D \coloneqq \big\{(x,x)\colon\ x \in [0,1]\big\},$$

y definimos f como la función característica de D. Entonces para cada x en $[0,1]$ tenemos

$$\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y 1_{\{x\}}\,\mathrm{d}\nu = 1,$$

así que

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = +\infty.$$

Por otro lado, para cada y en $[0,1]$

$$\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X 1_{\{y\}}\,\mathrm{d}\mu = 0,$$

así que

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) = 0.$$

Notamos que D el la intersección de los conjuntos elementales

$$\bigcup_{j=1}^{n} \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]^2,$$

por eso D pertenece a la σ-álgebra $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$.