# Teorema de Tonelli

**Objetivos.** Demostrar el teorema de Tonelli. Conocer un contraejemplo que muestra la importancia de la condición que las medidas son $\sigma$-finitas.

**Requisitos.** Definición del producto de medidas.

**1 Teorema** (sobre las integrales de medidas de secciones de un conjunto medible, repaso)**.** *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas $\sigma$-finitas. Para cada $Q$ en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, definimos $\varphi_Q \colon X \to [0, +\infty]$, $\psi_Q \colon Y \to [0, +\infty]$ mediante las siguientes reglas:*

$$\varphi_Q(x) \coloneqq \nu(Q_x) \qquad (x \in X), \qquad\qquad \psi_Q(y) \coloneqq \mu(Q^y) \qquad (y \in Y).$$

*Entonces, para cada $Q$ en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$,*

$$\varphi_Q \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]), \qquad \psi_Q \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty]), \qquad \int_X \varphi_Q \, \mathrm{d}\mu = \int_Y \psi_Q \, \mathrm{d}\nu.$$

**2 Definición** (producto de medidas, repaso)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas $\sigma$-finitas. Para cada $Q$ en $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, pongamos

$$(\mu \times \nu)(Q) \coloneqq \int_X \varphi_Q \, \mathrm{d}\mu.$$

Por el teorema demostrado anteriormente,

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_Y \psi_Q \, \mathrm{d}\nu.$$

La propiedad $\sigma$-aditiva de $\mu \times \nu$ se sigue del teorema sobre la integral de la serie de funciones positivas.

**3 Teorema** (Tonelli)**.** *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas $\sigma$-finitas, y sea $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, [0, +\infty])$. Definimos $u \colon X \to [0, +\infty]$, $w \colon Y \to [0, +\infty]$,*

$$u(x) \coloneqq \int_Y f_x \, \mathrm{d}\nu \qquad (x \in X), \qquad w(y) \coloneqq \int_X f^y \, \mathrm{d}\mu \qquad (y \in Y).$$

*Entonces, $u \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $w \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$, y*

$$\int_X u \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_Y w \, \mathrm{d}\nu.$$

*Demostración.* 1. Como $f$ es $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-medible, sus secciones $f_x$ y $f^y$ son medibles, así que todas las integrales tienen sentido.

2. Supongamos que $Q\in\mathcal{F}\times\mathcal{G}$ y $f=\mathbb{1}_Q$. Entonces,

$$f_x(y)=f(x,y)=\mathbb{1}_Q(x,y)=\begin{cases}1, & \text{si } (x,y)\in Q,\\ 0, & \text{si } (x,y)\notin Q;\end{cases}=\begin{cases}1, & \text{si } y\in Q_x,\\ 0, & \text{si } y\notin Q_x;\end{cases}=\mathbb{1}_{Q_x}(y).$$

Por eso

$$u(x)=\int\limits_Y \mathbb{1}_{Q_x}\,\mathrm{d}\nu=\nu(Q_x)=\varphi_Q(x).$$

Usando la definición de la medida $\mu\times\nu$, concluimos que

$$\int\limits_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int\limits_{X\times Y}\mathbb{1}_Q\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=(\mu\times\nu)(Q)=\int\limits_X\varphi_Q\,\mathrm{d}\mu=\int\limits_X u\,\mathrm{d}\mu.$$

De manera similar, se puede probar que

$$f^y(x)=\mathbb{1}_{Q^y}(x),\qquad w(y)=\int\limits_X\mathbb{1}_{Q^y}\,\mathrm{d}\mu=\mu(Q^y)=\psi_Q(y).$$

Aplicamos el Teorema 1:

$$(\mu\times\nu)(Q)=\int\limits_Y\psi_Q(y)=\int\limits_Y w\,\mathrm{d}\nu.$$

3. Por la propiedad aditiva de la medida y por las propiedades lineales de la integral, la afirmación es cierta también para funciones simples medibles positivas.

4. Consideremos el caso general: $f\in\mathcal{M}(X\times Y,\mathcal{F}\times\mathcal{G},[0,+\infty])$. Escogemos una sucesión creciente $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{SM}(X\times Y,\mathcal{F}\times\mathcal{G},[0,+\infty])$ tal que $s_n\to f$. Pongamos

$$t_n(x)\coloneqq\int\limits_Y(s_n)_x\,\mathrm{d}\nu\qquad(x\in X).$$

De la condición $s_n\le s_{n+1}$ se sigue que $t_n\le t_{n+1}$. Además $(s_n)_x\to f_x$, y por el teorema de la convergencia monótona

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}t_n(x).$$

Por el inciso 3,

$$\int\limits_X t_n\,\mathrm{d}\mu=\int\limits_{X\times Y}s_n\,\mathrm{d}(\mu\times\nu).$$

Pasamos al límite cuando $n\to\infty$ y por el teorema de la convergencia monótona obtenemos el resultado. □

**4 Corolario.** *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas $\sigma$-finitas, y sea $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathbb{C})$. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

*(a)* $\displaystyle\int_X \left( \int_Y |f(x,y)| \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) < +\infty,$

*(b)* $\displaystyle\int_Y \left( \int_X |f(x,y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) < +\infty,$

*(c)* $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mu \times \nu)$.

*Demostración.* Aplicar el teorema de Tonelli a la función $|f|$. □

**5 Ejemplo.** Mostremos que es esencial la condición que $\mu$ y $\nu$ son $\sigma$-finitas. Sean $X = Y = [0,1]$, $\mu$ es la medida de Lebesgue y $\nu$ es la medida de conteo. Aquí la medida $\nu$ no es $\sigma$-finita. Denotemos por $D$ a la diagonal del cuadrado $[0,1]^2$:

$$D \coloneqq \big\{(x,x) \colon \ x \in [0,1]\big\}.$$

Notamos que $D$ el la intersección de los conjuntos elementales

$$\bigcup_{j=1}^{n} \left[ \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right]^2,$$

por eso $D$ pertenece a la $\sigma$-álgebra $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

Definimos $f$ como la función característica de $D$. Para cada $x$ en $[0,1]$, tenemos

$$\int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) = \int_Y 1_{\{x\}} \, \mathrm{d}\nu = 1,$$

así que

$$\int_X \left( \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = +\infty.$$

Por otro lado, para cada $y$ en $[0,1]$,

$$\int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X 1_{\{y\}} \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

así que

$$\int_Y \left( \int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) = 0.$$