Teoremas de Tonelli y Fubini

Objetivos. Demostrar teoremas de Tonelli y Fubini, conocer contraejemplos que muestran la importancia de algunas condiciones de estos teoremas.

Requisitos. Definición del producto de medidas.

1. Teorema sobre las integrales de medidas de secciones de un conjunto medible (repaso). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas, y sea Q en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Pongamos

$$\varphi(x) = \nu(Q_x) \qquad (x \in X), \qquad\qquad \psi(y) = \mu(Q^y) \qquad (y \in Y).$$

Entonces $\varphi \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\psi \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$, y

$$\int\limits_X \varphi \, d\mu = \int\limits_Y \psi \, d\nu.$$

2. Producto de medidas (repaso). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas. Para cualquier Q en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ pongamos

$$(\mu \times \nu)(Q) \coloneqq \int\limits_X \nu(Q_x) \, d\mu(x).$$

Por el teorema demostrado anteriormente,

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int\limits_Y \mu(Q^y) \, d\nu(y).$$

La propiedad σ-aditiva de $\mu \times \nu$ se sigue del teorema sobre la integral de la serie de funciones positivas.

3. Teorema de Tonelli. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas, y sea $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$\varphi(x) \coloneqq \int\limits_Y f_x \, d\nu \qquad (x \in X), \qquad\qquad \psi(y) \coloneqq \int\limits_X f^y \, d\mu \qquad (y \in Y).$$

Entonces $\varphi \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, $\psi \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{G}, [0, +\infty])$, y

$$\int\limits_X \varphi \, d\mu = \int\limits_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int\limits_Y \psi \, d\nu.$$

Demostración. 1. Como la función f es $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$-medible, sus secciones f_x y f^y son medibles, así que todas las integrales tienen sentido.

2. Supongamos que $Q \in \mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$ y $f = 1_Q$. Entonces

$$f_x(y) = f(x,y) = 1_Q(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x,y) \in Q, \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin Q; \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } y \in Q_x, \\ 0, & \text{si } y \notin Q_x; \end{cases} = 1_{Q_x}(y).$$

Por eso

$$\varphi(x) = \int\limits_Y 1_{Q_x}\, d\nu = \nu(Q_x).$$

Usando la definición de la medida $\mu \times \nu$, concluimos que

$$\int\limits_{X\times Y} 1_Q\, d(\mu\times\nu) = (\mu\times\nu)(Q) = \int\limits_X \nu(Q_x) = \int\limits_X \varphi\, d\mu.$$

De manera similar, se puede probar que

$$f^y(x) = 1_{Q^y}(x), \qquad \psi(y) = \int\limits_X 1_{Q^y}\, d\mu = \mu(Q^y).$$

Por el Teorema 1,

$$\mu(Q) = \int\limits_Y \mu(Q^y)\, d\nu(y),$$

esto es,

$$\int\limits_{X\times Y} 1_Q\, d(\mu\times\nu) = \int\limits_X \psi\, d\nu.$$

3. Por la propiedad aditiva de la medida y de la integral, la afirmación es cierta también para funciones simples medibles positivas.

4. Consideremos el caso general: $f \in \mathcal{M}(X\times Y, \mathcal{F}\otimes\mathcal{G}, [0,+\infty])$. Escogemos una sucesión creciente $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{SM}(X\times Y, \mathcal{F}\otimes\mathcal{G}, [0,+\infty])$ tal que $s_n \to f$. Pongamos

$$\varphi_n(x) \coloneqq \int\limits_Y (s_n)_x\, d\nu \qquad (x \in X).$$

De la condición $s_n \le s_{n+1}$ se sigue que $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$. Además $(s_n)_x \to f_x$, y por el teorema de convergencia monótona

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x).$$

Por el inciso 3,

$$\int\limits_X \varphi_n\, d\mu = \int\limits_{X\times Y} s_n\, d(\mu\times\nu).$$

Pasamos al límite cuando $n \to \infty$ y con el teorema de convergencia monótona obtenemos el resultado. □

4. Corolario. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas, y sea $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{C})$. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:

(a) $\displaystyle \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) < +\infty,$

(b) $\displaystyle \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < +\infty,$

(c) $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu)$.

Demostración. Aplicar el teorema de Tonelli a la función $|f|$. □

5. Teorema de Fubini. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas, y sea $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathbb{C})$. Entonces $f_x \in L^1(Y, \mathcal{G}, \nu)$ para casi todo punto x en X, $f^y \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ para casi todo punto y en Y, las funciones φ y ψ definidas en casi todos puntos mediante

$$\varphi(x) \coloneqq \int_Y f_x\, d\nu \qquad (x \in X), \qquad\qquad \psi(y) \coloneqq \int_X f^y\, d\mu \qquad (y \in Y),$$

son integrables, y

$$\int_X \varphi\, d\mu = \int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi\, d\nu.$$

Demostración. Obviamente el caso complejo se reduce al caso real, por eso consideremos solamente el caso real. Pongamos

$$\varphi_1(x) \coloneqq \int_Y (f_+)_x\, d\nu \qquad (x \in X), \qquad\qquad \psi_1(y) \coloneqq \int_X (f_+)^y\, d\mu \qquad (y \in Y),$$

y de manera similar definimos φ_2 y ψ_2 a partir de la función f_-. Como $f_+ \le |f|$ y $f_- \le |f|$, tenemos que $f_+, f_- \in L^1(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu, [0, +\infty])$, y por el teorema de Tonelli

$$\int_X \varphi_1\, d\mu = \int_{X \times Y} f_+\, d(\mu \times \nu) < +\infty, \qquad \int_X \varphi_2\, d\mu = \int_{X \times Y} f_-\, d(\mu \times \nu) < +\infty, \tag{1}$$

así que $\varphi_1, \varphi_2 \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$. Pongamos

$$E \coloneqq \{x \in X\colon \quad \varphi_1(x) = +\infty \quad \vee \quad \varphi_2(x) = +\infty\}.$$

Entonces $\mu(E) = 0$. Para cada x en $X \setminus E$ tenemos

$$\int_Y (f_+)_x\, d\nu < +\infty, \quad \int_Y (f_-)_x\, d\nu < +\infty,$$

así que $f_x = (f_+)_x - (f_-)_x \in L^1(Y, \mathcal{G}, \nu)$. Más aún, para cada x en $X \setminus E$ tenemos $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, así que $\varphi \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$. Restando las igualdades (1), obtenemos una de las igualdades requeridas, y la otra se demuestra de manera similar. $\square$

6. Contraejemplo 1. $X = Y = [0,1]$, μ es la medida de Lebesgue y ν es la medida de conteo. Aquí la medida ν no es σ-finita. Denotemos por D a la diagonal del cuadrado $[0,1]^2$:

$$D \coloneqq \big\{(x,x)\colon\ x \in [0,1]\big\},$$

y definimos f como la función característica de D. Entonces para cada x en $[0,1]$ tenemos

$$\int\limits_Y f(x,y)\,d\nu(y) = \int\limits_Y 1_{\{x\}}\,d\nu = 1,$$

así que

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)\,d\mu(x) = +\infty.$$

Por otro lado, para cada y en $[0,1]$

$$\int\limits_X f(x,y)\,d\mu(x) = \int\limits_X 1_{\{y\}}\,d\mu = 0,$$

así que

$$\int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)\,d\nu(y) = 0.$$

Notamos que D el la intersección de los conjuntos elementales

$$\bigcup_{j=1}^{n} \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]^2,$$

por eso D pertenece a la σ-álgebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

7. Contraejemplo 2. Sea $X = Y = [0,1]$, μ y ν es la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Elegimos una sucesión estrictamente creciente $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ tal que $a_0 = 0$ y $a_n \to 1$ cuando n tiende a infinito. Para cada n construimos g_n como una función real continua con soporte en (a_n, a_{n+1}) y tal que

$$\int\limits_{[0,1]} g_n(t)\,dt = 1.$$

Pongamos

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x))g_n(y).$$

Notemos que para cada $(x, y) \in [0, 1]^2$ solamente un término en esta serie puede ser distinto de cero, así que la suma tiene sentido. Se puede ver que

$$\int\limits_{[0,1]} \left(\int\limits_{[0,1]} f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) = 0, \qquad \int\limits_{[0,1]} \left(\int\limits_{[0,1]} f(x, y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) = 1.$$