

Desigualdad de Schwarz

Egor Maximenko, Enrique Abdeel Muñoz de la Colina, Elisa Suárez Barraza

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

27 de mayo de 2022

Plan

- 1 Introducción
- 2 Repaso de herramientas
- 3 Desigualdad de Schwarz
- 4 Ejemplo de aplicación
- 5 El caso de igualdad

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Repaso de herramientas
- 3 Desigualdad de Schwarz
- 4 Ejemplo de aplicación
- 5 El caso de igualdad

Objetivos

Dado un espacio vectorial complejo H con producto interno, demostrar la desigualdad de Schwarz:

$$\forall a, b \in H \quad |\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle.$$

Encontrar una condición necesaria y suficiente para la igualdad

$$|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle.$$

Algunas aplicaciones prontas

- Demostrar la propiedad subaditiva de la norma asociada al producto interno.
- Demostrar la continuidad del producto interno (como función $H \times H \rightarrow \mathbb{C}$).
- En particular, dado a en H , demostrar que

$$\varphi_a: H \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_a(x) := \langle x, a \rangle,$$

es un funcional lineal continuo.

Prerrequisitos

- Productos internos en espacios vectoriales complejos.
- La identidad de Pitágoras para el producto interno.
- La proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio unidimensional.

Plan

- 1 Introducción
- 2 Repaso de herramientas**
- 3 Desigualdad de Schwarz
- 4 Ejemplo de aplicación
- 5 El caso de igualdad

Proposición (sobre el complemento ortogonal de un subespacio unidimensional, repaso)

Sea $a \in H$. Entonces

$$\text{lin}(a)^\perp = \{a\}^\perp.$$

Demostración de \supseteq .

Sea $x \perp a$. Demostremos que $x \perp \text{lin}(a)$.

Para cada $y \in \text{lin}(a)$, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $y = \lambda a$. Luego

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \lambda a \rangle = \bar{\lambda} \langle x, a \rangle = 0.$$

Proposición (la proyección ortogonal sobre una recta y el complemento ortogonal)

Sean $a, b \in H$, $a \neq 0_H$. Pongamos

$$w = b - \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a.$$

Entonces $w \perp \text{lin}(a)$.

Proposición (la proyección ortogonal sobre una recta y el complemento ortogonal)

Sean $a, b \in H$, $a \neq 0_H$. Pongamos

$$w = b - \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a.$$

Entonces $w \perp \text{lin}(a)$.

Demostración. Por las propiedades del producto interno,

$$\langle w, a \rangle = \langle b, a \rangle - \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \langle a, a \rangle = 0.$$

Luego $w \in \{a\}^\perp = \text{lin}(a)^\perp$.

Teorema de Pitágoras para espacios con producto interno, repaso

Proposición

Sean $u, w \in H$ tales que $u \perp w$. Entonces

$$\langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle.$$

Demostración. Recordamos que

$$\langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle u, w \rangle) + \langle w, w \rangle.$$

La suposición $u \perp w$ significa que $\langle u, w \rangle = 0$, y se obtiene el resultado requerido.

Comparación de la hipotenusa con un cateto en un triángulo rectángulo

Corolario (la hipotenusa es mayor o igual que el cateto)

Sean $u, w \in H$ tales que $u \perp w$. Entonces

$$\langle u + w, u + w \rangle \geq \langle u, u \rangle.$$

Comparación de la hipotenusa con un cateto en un triángulo rectángulo

Corolario (la hipotenusa es mayor o igual que el cateto)

Sean $u, w \in H$ tales que $u \perp w$. Entonces

$$\langle u + w, u + w \rangle \geq \langle u, u \rangle.$$

Demostración. Usamos la identidad de Pitágoras y el hecho que $\langle w, w \rangle \geq 0$:

$$\langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle \geq \langle u, u \rangle.$$

Plan

- 1 Introducción
- 2 Repaso de herramientas
- 3 Desigualdad de Schwarz**
- 4 Ejemplo de aplicación
- 5 El caso de igualdad

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle.$$

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle.$$

En el caso $H = \mathbb{R}^n$ o $H = \mathbb{C}^n$, fue encontrada por Augustin Louis Cauchy (1821).

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle.$$

En el caso $H = \mathbb{R}^n$ o $H = \mathbb{C}^n$, fue encontrada por Augustin Louis Cauchy (1821).

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1859) notó que la desigualdad de Cauchy se puede generalizar al producto interno definido mediante la integral.

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sean $a, b \in H$. Entonces

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle.$$

En el caso $H = \mathbb{R}^n$ o $H = \mathbb{C}^n$, fue encontrada por Augustin Louis Cauchy (1821).

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1859) notó que la desigualdad de Cauchy se puede generalizar al producto interno definido mediante la integral.

Karl Hermann Amandus Schwarz (1888) propuso una demostración para la situación general.

Demostración, caso trivial

Queremos demostrar que

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle.$$

Si $a = 0_H$, entonces ambos lados son cero, y la afirmación se cumple.

Demostración, caso principal

Supongamos que $a \neq 0_H$. Sea

$$u := P_a(b) = \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a, \quad w := b - u.$$

Demostración, caso principal

Supongamos que $a \neq 0_H$. Sea

$$u := P_a(b) = \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a, \quad w := b - u.$$

Entonces $u \in \text{lin}(a)$ y $w \in \text{lin}(a)^\perp$, por lo que $u \perp w$.

Demostración, caso principal

Supongamos que $a \neq 0_H$. Sea

$$u := P_a(b) = \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a, \quad w := b - u.$$

Entonces $u \in \text{lin}(a)$ y $w \in \text{lin}(a)^\perp$, por lo que $u \perp w$.

Aplicamos el corolario del teorema de Pitágoras y calculamos $\langle u, u \rangle$:

$$\langle b, b \rangle \geq \langle u, u \rangle = \langle P_a(b), P_a(b) \rangle = \left(\frac{|\langle b, a \rangle|}{\langle a, a \rangle} \right)^2 \langle a, a \rangle = \frac{|\langle a, b \rangle|^2}{\langle a, a \rangle}.$$

Demostración, caso principal

Supongamos que $a \neq 0_H$. Sea

$$u := P_a(b) = \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a, \quad w := b - u.$$

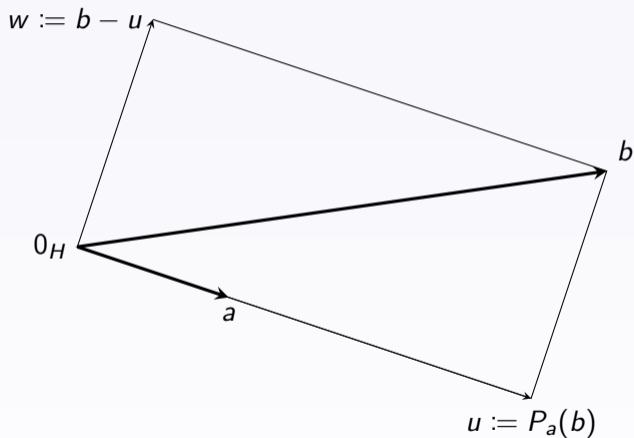
Entonces $u \in \text{lin}(a)$ y $w \in \text{lin}(a)^\perp$, por lo que $u \perp w$.

Aplicamos el corolario del teorema de Pitágoras y calculamos $\langle u, u \rangle$:

$$\langle b, b \rangle \geq \langle u, u \rangle = \langle P_a(b), P_a(b) \rangle = \left(\frac{|\langle b, a \rangle|}{\langle a, a \rangle} \right)^2 \langle a, a \rangle = \frac{|\langle a, b \rangle|^2}{\langle a, a \rangle}.$$

Multiplicamos la desigualdad obtenida por $\langle a, a \rangle$ y llegamos al resultado requerido.

El sentido geométrico de la desigualdad de Schwarz



La longitud del cateto $u = P_a b$ es menor o igual a la longitud de la hipotenusa b .

Ejercicio

Consideramos $H = L^2([-\pi, \pi])$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt.$$

Sean $f \in H$, $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt \right|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f^2(t)| dt.$$

Plan

- 1 Introducción
- 2 Repaso de herramientas
- 3 Desigualdad de Schwarz
- 4 Ejemplo de aplicación**
- 5 El caso de igualdad

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

Teorema (Generalización de Schur de la desigualdad de Hilbert)

Sean $a, b \in \mathbb{C}^N$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces

$$\left| \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{a_m b_n}{m+n-\alpha} \right| \leq \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \left(\sum_{m=1}^N |a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

Teorema (Generalización de Schur de la desigualdad de Hilbert)

Sean $a, b \in \mathbb{C}^N$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces

$$\left| \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{a_m b_n}{m+n-\alpha} \right| \leq \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \left(\sum_{m=1}^N |a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para la demostración se necesitara del siguiente lema.

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

Lema

Sean $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x} \right| dx \geq 2 \sin(\pi\alpha) \left| \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_k - \alpha} \right|.$$

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

Demostración del lema. Comenzamos con la estimación

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x} \right| dx &\geq \left| \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n c_k e^{i(\lambda_k - \alpha)x} dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n c_k \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda_k - \alpha)x} dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_k - \alpha} \int_0^{2\pi(\lambda_k - \alpha)} e^{iu} du \right|. \end{aligned}$$

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

Demostración del lema. Comenzamos con la estimación

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n c_k e^{i\lambda_k x} \right| dx &\geq \left| \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n c_k e^{i(\lambda_k - \alpha)x} dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n c_k \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda_k - \alpha)x} dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_k - \alpha} \int_0^{2\pi(\lambda_k - \alpha)} e^{iu} du \right|. \end{aligned}$$

Pero el módulo de la última integral depende solo de α :

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi(\lambda_k - \alpha)} e^{iu} du &= -ie^{iu} \Big|_0^{2\pi(\lambda_k - \alpha)} \\ &= -i \left[e^{i2\pi(\lambda_k - \alpha)} - 1 \right] = -i \left[e^{i2\pi\alpha} - 1 \right] \\ &= -ie^{-i\pi\alpha} \left[e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha} \right] = -2e^{-i\pi\alpha} \sin(\pi\alpha).\end{aligned}$$

Ejemplo de aplicación de la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi(\lambda_k-\alpha)} e^{iu} du &= -ie^{iu} \Big|_0^{2\pi(\lambda_k-\alpha)} \\ &= -i \left[e^{i2\pi(\lambda_k-\alpha)} - 1 \right] = -i \left[e^{i2\pi\alpha} - 1 \right] \\ &= -ie^{-i\pi\alpha} \left[e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha} \right] = -2e^{-i\pi\alpha} \sin(\pi\alpha).\end{aligned}$$

Así,

$$\left| \int_0^{2\pi(\lambda_k-\alpha)} e^{iu} du \right| = 2 \sin(\pi\alpha),$$

y se obtiene el resultado.

Demostración del teorema

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_m e^{imx} b_n e^{inx} \right| dx \leq \left(\sum_{m=1}^N |a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Demostración del teorema

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_m e^{imx} b_n e^{inx} \right| dx \leq \left(\sum_{m=1}^N |a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, usando el lema con $c_k = a_m b_n$ y $\lambda_k = m + n$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_m e^{imx} b_n e^{inx} \right| dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_m b_n e^{i(n+m)x} \right| dx \\ &\geq \frac{1}{2\pi} 2 \sin(\pi\alpha) \left| \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{a_m b_n}{n+m-\alpha} \right|. \end{aligned}$$

Juntando ambas desigualdades se tiene el resultado.

Plan

- 1 Introducción
- 2 Repaso de herramientas
- 3 Desigualdad de Schwarz
- 4 Ejemplo de aplicación
- 5 El caso de igualdad

El caso de igualdad en la desigualdad de Schwarz

Proposición

Sean $a, b \in H$. Entonces la igualdad

$$|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$$

se cumple si, y sólo si, los vectores a y b son linealmente dependientes.

Demostración, \implies

Supongamos que se cumple la igualdad: $|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

Demostración, \implies

Supongamos que se cumple la igualdad: $|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

En el caso trivial $a = 0_H$ se tiene que a, b son l.d.

Demostración, \implies

Supongamos que se cumple la igualdad: $|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

En el caso trivial $a = 0_H$ se tiene que a, b son l.d.

Consideremos el caso $a \neq 0_H$. Definimos u y w como en la demostración del teorema.

Demostración, \implies

Supongamos que se cumple la igualdad: $|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

En el caso trivial $a = 0_H$ se tiene que a, b son l.d.

Consideremos el caso $a \neq 0_H$. Definimos u y w como en la demostración del teorema.

Por la identidad de Pitágoras,

$$\langle b, b \rangle = \langle u + w, u + w \rangle = \left(\frac{|\langle a, b \rangle|}{\langle a, a \rangle} \right)^2 \langle a, a \rangle + \langle w, w \rangle = \langle b, b \rangle + \langle w, w \rangle.$$

Demostración, \implies

Supongamos que se cumple la igualdad: $|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

En el caso trivial $a = 0_H$ se tiene que a, b son l.d.

Consideremos el caso $a \neq 0_H$. Definimos u y w como en la demostración del teorema.

Por la identidad de Pitágoras,

$$\langle b, b \rangle = \langle u + w, u + w \rangle = \left(\frac{|\langle a, b \rangle|}{\langle a, a \rangle} \right)^2 \langle a, a \rangle + \langle w, w \rangle = \langle b, b \rangle + \langle w, w \rangle.$$

Concluimos que $\langle w, w \rangle = 0$ y

Demostración, \implies

Supongamos que se cumple la igualdad: $|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

En el caso trivial $a = 0_H$ se tiene que a, b son l.d.

Consideremos el caso $a \neq 0_H$. Definimos u y w como en la demostración del teorema.

Por la identidad de Pitágoras,

$$\langle b, b \rangle = \langle u + w, u + w \rangle = \left(\frac{|\langle a, b \rangle|}{\langle a, a \rangle} \right)^2 \langle a, a \rangle + \langle w, w \rangle = \langle b, b \rangle + \langle w, w \rangle.$$

Concluimos que $\langle w, w \rangle = 0$ y $w = 0_H$.

Demostración, \implies

Supongamos que se cumple la igualdad: $|\langle a, b \rangle|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

En el caso trivial $a = 0_H$ se tiene que a, b son l.d.

Consideremos el caso $a \neq 0_H$. Definimos u y w como en la demostración del teorema.

Por la identidad de Pitágoras,

$$\langle b, b \rangle = \langle u + w, u + w \rangle = \left(\frac{|\langle a, b \rangle|}{\langle a, a \rangle} \right)^2 \langle a, a \rangle + \langle w, w \rangle = \langle b, b \rangle + \langle w, w \rangle.$$

Concluimos que $\langle w, w \rangle = 0$ y $w = 0_H$. Por lo tanto, $b = \lambda a$, con $\lambda = \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle}$.

Demostración, ←

Supongamos que a y b son linealmente dependientes.

Demostración, \Leftarrow

Supongamos que a y b son linealmente dependientes.

Si $a = 0_H$, entonces $|\langle b, a \rangle|^2 = 0 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

Demostración, \Leftarrow

Supongamos que a y b son linealmente dependientes.

Si $a = 0_H$, entonces $|\langle b, a \rangle|^2 = 0 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

Supongamos que $a \neq 0_H$. Entonces $b \in \text{lin}(a)$.

Demostración, \Leftarrow

Supongamos que a y b son linealmente dependientes.

Si $a = 0_H$, entonces $|\langle b, a \rangle|^2 = 0 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

Supongamos que $a \neq 0_H$. Entonces $b \in \text{lin}(a)$.

Sea $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $b = \gamma a$.

Demostración, \Leftarrow

Supongamos que a y b son linealmente dependientes.

Si $a = 0_H$, entonces $|\langle b, a \rangle|^2 = 0 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

Supongamos que $a \neq 0_H$. Entonces $b \in \text{lin}(a)$.

Sea $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $b = \gamma a$. Entonces

$$|\langle a, b \rangle|^2 = |\langle a, \gamma a \rangle|^2 = |\bar{\gamma}|^2 |\langle a, a \rangle|^2.$$

Demostración, \Leftarrow

Supongamos que a y b son linealmente dependientes.

Si $a = 0_H$, entonces $|\langle b, a \rangle|^2 = 0 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$.

Supongamos que $a \neq 0_H$. Entonces $b \in \text{lin}(a)$.

Sea $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $b = \gamma a$. Entonces

$$|\langle a, b \rangle|^2 = |\langle a, \gamma a \rangle|^2 = |\bar{\gamma}|^2 |\langle a, a \rangle|^2.$$

Por otro lado,

$$\langle a, a \rangle \langle b, b \rangle = \langle a, a \rangle \langle \gamma a, \gamma a \rangle = |\gamma|^2 |\langle a, a \rangle|^2.$$