Desigualdad de Schwarz para espacios con semi-producto interno

Egor Maximenko, usando presentaciones previas
con Enrique Abdeel Muñoz de la Colina y Elisa Suarez Barraza

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

22 de septiembre de 2022

Plan

Contenido

Objetivos

Sea V un espacio vectorial complejo y sea φ un semi-producto interno en V.

Vamos a demostrar que

$$\forall a, b \in V \qquad |\varphi(a, b)|^2 \leq \varphi(a, a)\, \varphi(b, b).$$

Prerrequisitos

- Productos internos y semi-productos internos en espacios vectoriales complejos.
- El teorema de Pitágoras.
- La idea de proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio unidimensional.

Plan

Semi-producto interno

Definición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$.

Decimos que φ es un semi-producto interno o pre-producto interno, si φ tiene las siguientes propiedades.

1. φ es sesquilineal.
2. φ es conjugadamente simétrica:
$$\forall a, b \in V \qquad \varphi(b, a) = \overline{\varphi(a, b)}.$$
3. $\varphi(a, a) \geq 0$ para cada a en V.

La proyección ortogonal sobre una recta, en el contexto de semi-productos internos

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ un semi-producto interno.

Sean $a, b \in V$ tales que $\varphi(a, a) \neq 0$. Pongamos

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad w := b - \lambda\, a.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$.

Demostración

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad w = b - \lambda\, a.$$

Demostración

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad w = b - \lambda\, a.$$

Por la propiedad lineal de φ respecto al primer argumento,

$$\varphi(w, a)$$

Demostración

$$\lambda := \frac{\varphi(b,a)}{\varphi(a,a)}, \qquad w = b - \lambda\, a.$$

Por la propiedad lineal de φ respecto al primer argumento,

$$\varphi(w,a) =$$

Demostración

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad w = b - \lambda\, a.$$

Por la propiedad lineal de φ respecto al primer argumento,

$$\varphi(w, a) = \varphi(b - \lambda\, a, a)$$

Demostración

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad w = b - \lambda\, a.$$

Por la propiedad lineal de φ respecto al primer argumento,

$$\varphi(w, a) = \varphi(b - \lambda\, a, a) =$$

Demostración

$$\lambda := \frac{\varphi(b,a)}{\varphi(a,a)}, \qquad w = b - \lambda\, a.$$

Por la propiedad lineal de φ respecto al primer argumento,

$$\varphi(w,a) = \varphi(b - \lambda\, a, a) = \varphi(b,a) - \lambda\, \varphi(a,a)$$

Demostración

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad w = b - \lambda\, a.$$

Por la propiedad lineal de φ respecto al primer argumento,

$$\varphi(w, a) = \varphi(b - \lambda\, a, a) = \varphi(b, a) - \lambda\, \varphi(a, a) =$$

Demostración

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad w = b - \lambda\, a.$$

Por la propiedad lineal de φ respecto al primer argumento,

$$\varphi(w, a) = \varphi(b - \lambda\, a, a) = \varphi(b, a) - \lambda\, \varphi(a, a) = 0.$$

Teorema de Pitágoras para espacios con semi-producto interno

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ un semi-producto interno.

Sean $u, w \in V$ tales que $\varphi(u, w) = 0$. Entonces

$$\varphi(u + w, u + w) = \varphi(u, u) + \varphi(w, w).$$

Teorema de Pitágoras para espacios con semi-producto interno

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ un semi-producto interno.
Sean $u, w \in V$ tales que $\varphi(u, w) = 0$. Entonces

$$\varphi(u + w, u + w) = \varphi(u, u) + \varphi(w, w).$$

Demostración. Como φ es aditiva respecto al primer y segundo argumento,

$$\varphi(u + w, u + w) = \varphi(u, u) + \varphi(u, w) + \varphi(w, u) + \varphi(w, w).$$

Teorema de Pitágoras para espacios con semi-producto interno

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ un semi-producto interno.
Sean $u, w \in V$ tales que $\varphi(u, w) = 0$. Entonces

$$\varphi(u + w, u + w) = \varphi(u, u) + \varphi(w, w).$$

Demostración. Como φ es aditiva respecto al primer y segundo argumento,

$$\varphi(u + w, u + w) = \varphi(u, u) + \varphi(u, w) + \varphi(w, u) + \varphi(w, w).$$

Por la suposición, $\varphi(u, w) = 0$.

Teorema de Pitágoras para espacios con semi-producto interno

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ un semi-producto interno.

Sean $u, w \in V$ tales que $\varphi(u, w) = 0$. Entonces

$$\varphi(u + w, u + w) = \varphi(u, u) + \varphi(w, w).$$

Demostración. Como φ es aditiva respecto al primer y segundo argumento,

$$\varphi(u + w, u + w) = \varphi(u, u) + \varphi(u, w) + \varphi(w, u) + \varphi(w, w).$$

Por la suposición, $\varphi(u, w) = 0$. Además, $\varphi(w, u) = \overline{\varphi(u, w)} = 0$.

Comparación de la hipotenusa con un cateto en un triángulo rectángulo

Corolario

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ un semi-producto interno.

Sean $u, w \in V$ tales que $\varphi(u, w) = 0$. Entonces

$$\varphi(u + w, u + w) \geq \varphi(u, u).$$

Comparación de la hipotenusa con un cateto en un triángulo rectángulo

Corolario

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ un semi-producto interno.

Sean $u, w \in V$ tales que $\varphi(u, w) = 0$. Entonces

$$\varphi(u + w, u + w) \geq \varphi(u, u).$$

Demostración. Usamos la identidad de Pitágoras y el hecho que $\varphi(w, w) \geq 0$:

$$\varphi(u + w, u + w) = \varphi(u, u) + \varphi(w, w) \geq \varphi(u, u).$$

Plan

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ un semi-producto interno.

Sean $a, b \in V$. Entonces

$$|\varphi(a, b)|^2 \leq \varphi(a, b)\,\varphi(b, b).$$

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ un semi-producto interno.

Sean $a, b \in V$. Entonces

$$|\varphi(a,b)|^2 \leq \varphi(a,b)\,\varphi(b,b).$$

En el caso $V = \mathbb{R}^n$ o $V = \mathbb{C}^n$, fue encontrada por Augustin Louis Cauchy (1821).

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ un semi-producto interno.
Sean $a, b \in V$. Entonces

$$|\varphi(a,b)|^2 \leq \varphi(a,b)\,\varphi(b,b).$$

En el caso $V = \mathbb{R}^n$ o $V = \mathbb{C}^n$, fue encontrada por Augustin Louis Cauchy (1821).

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1859) notó que la desigualdad de Cauchy se puede generalizar al producto interno definido mediante la integal.

Desigualdad de Schwarz

Teorema

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ un semi-producto interno.
Sean $a, b \in V$. Entonces
$$|\varphi(a, b)|^2 \leq \varphi(a, b)\,\varphi(b, b).$$

En el caso $V = \mathbb{R}^n$ o $V = \mathbb{C}^n$, fue encontrada por Augustin Louis Cauchy (1821).

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1859) notó que la desigualdad de Cauchy se puede generalizar al producto interno definido mediante la integal.

Karl Hermann Amandus Schwarz (1888) propuso una demostración para la situación general.

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\, \varphi(w, a) = 0$.

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\, \varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b)$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\, \varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b) =$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\,\varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b) = \varphi(u + w, u + w)$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\, \varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b) = \varphi(u + w, u + w) \geq$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\, \varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b) = \varphi(u + w, u + w) \geq \varphi(u, u)$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\, \varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b) = \varphi(u + w, u + w) \geq \varphi(u, u) =$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\,\varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b) = \varphi(u + w, u + w) \geq \varphi(u, u) = \varphi(\lambda a, \lambda a)$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\,\varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b) = \varphi(u + w, u + w) \geq \varphi(u, u) = \varphi(\lambda a, \lambda a) =$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\,\varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b) = \varphi(u + w, u + w) \geq \varphi(u, u) = \varphi(\lambda a, \lambda a) = |\lambda|^2 \varphi(a, a)$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\, \varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b) = \varphi(u + w, u + w) \geq \varphi(u, u) = \varphi(\lambda a, \lambda a) = |\lambda|^2 \varphi(a, a) =$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\, \varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b) = \varphi(u + w, u + w) \geq \varphi(u, u) = \varphi(\lambda a, \lambda a) = |\lambda|^2 \varphi(a, a) = \frac{|\varphi(a, b)|^2}{\varphi(a, a)}.$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) > 0$

Supongamos que $\varphi(a, a) > 0$. Sean

$$\lambda := \frac{\varphi(b, a)}{\varphi(a, a)}, \qquad u := \lambda\, a, \qquad w := b - u.$$

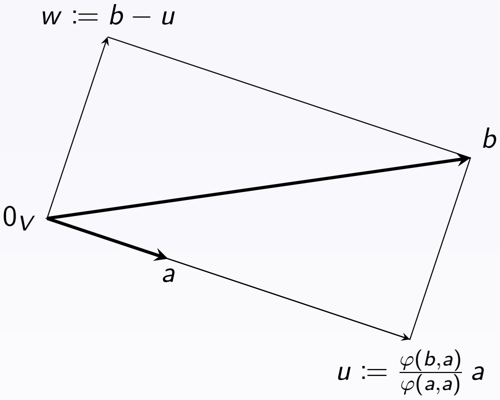
Entonces $\varphi(w, a) = 0$. Luego $\varphi(w, u) = \varphi(w, \lambda a) = \overline{\lambda}\,\varphi(w, a) = 0$.

Usamos el corolario del teorema de Pitágoras:

$$\varphi(b, b) = \varphi(u + w, u + w) \geq \varphi(u, u) = \varphi(\lambda a, \lambda a) = |\lambda|^2 \varphi(a, a) = \frac{|\varphi(a, b)|^2}{\varphi(a, a)}.$$

Multiplicamos la desigualdad obtenida por $\varphi(a, a)$ y llegamos al resultado requerido.

El sentido geométrico de la desigualdad de Schwarz para $\varphi(a, a) > 0$



La longitud del cateto u es menor o igual a la longitud de la hipotenusa b.

Demostración, el caso $\varphi(a, a) = 0$, inicio

Para cada $\gamma > 0$ pongamos $z_\gamma = \gamma\, b - \varphi(b, a)a$.

Usamos el hecho que $\varphi(z_\gamma, z_\gamma) \geq 0$:

$$\varphi(\gamma\, b - \varphi(b, a)a, \gamma\, b - \varphi(b, a)a) \geq 0.$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) = 0$, inicio

Para cada $\gamma > 0$ pongamos $z_\gamma = \gamma\, b - \varphi(b, a)a$.
Usamos el hecho que $\varphi(z_\gamma, z_\gamma) \geq 0$:

$$\varphi(\gamma\, b - \varphi(b, a)a, \gamma\, b - \varphi(b, a)a) \geq 0.$$

Desarrollamos la expresión del lado izquierdo por la propiedad sesquilineal:

$$\gamma^2\, \varphi(b, b) - \gamma\, \overline{\varphi(b, a)}\, \varphi(b, a) - \gamma\, \varphi(b, a)\, \varphi(a, b) + \varphi(b, a)\, \varphi(a, b)\, \varphi(a, a) \geq 0.$$

Aplicamos la propiedad conjugadamente simétrica y la suposición que $\varphi(a, a) = 0$:

$$\gamma^2\, \varphi(v, v) - 2\gamma\, |\varphi(a, b)|^2 \geq 0.$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) = 0$, final

Hemos demostrado que para cada $\gamma > 0$

$$\gamma^2 \, \varphi(b, b) - 2\gamma \, |\varphi(a, b)|^2 \geq 0.$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) = 0$, final

Hemos demostrado que para cada $\gamma > 0$

$$\gamma^2 \varphi(b, b) - 2\gamma \, |\varphi(a, b)|^2 \geq 0.$$

Suponiendo que $\gamma > 0$, dividimos ambos lados entre γ:

$$\gamma \, \varphi(b, b) - 2|\varphi(a, b)|^2 \geq 0.$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) = 0$, final

Hemos demostrado que para cada $\gamma > 0$

$$\gamma^2 \varphi(b, b) - 2\gamma\, |\varphi(a, b)|^2 \geq 0.$$

Suponiendo que $\gamma > 0$, dividimos ambos lados entre γ:

$$\gamma\, \varphi(b, b) - 2|\varphi(a, b)|^2 \geq 0.$$

Ahora pasamos al límite, cuando γ tiende a 0 por la derecha.

$$|\varphi(a, b)|^2 \leq 0.$$

Demostración, el caso $\varphi(a, a) = 0$, final

Hemos demostrado que para cada $\gamma > 0$

$$\gamma^2 \varphi(b, b) - 2\gamma\, |\varphi(a, b)|^2 \geq 0.$$

Suponiendo que $\gamma > 0$, dividimos ambos lados entre γ:

$$\gamma\, \varphi(b, b) - 2|\varphi(a, b)|^2 \geq 0.$$

Ahora pasamos al límite, cuando γ tiende a 0 por la derecha.

$$|\varphi(a, b)|^2 \leq 0.$$

Obtenemos $\quad |\varphi(a, b)|^2 = 0 = \varphi(a, a)\, \varphi(b, b).$