La desigualdad de Schwarz para los semi-productos internos

La función φ en la siguiente proposición tiene casi todas las propiedades del producto interno, pero para los vectores u no nulos pedimos solamente la desigualdad no estricta $\varphi(u,u) \ge 0$.

1 Teorema (la desigualdad de Schwarz para los semi-productos internos)**.** *Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\varphi\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal conjugadamente simétrica, tal que $\varphi(u,u) \ge 0$ para cada u en V. Entonces para cada u, v en V,*

$$|\varphi(u,v)|^2 \le \varphi(u,u)\,\varphi(v,v). \tag{1}$$

Demostración elemental. Primero consideremos el caso $\varphi(u,u) > 0$. Pongamos

$$\lambda \coloneqq \frac{\varphi(v,u)}{\varphi(u,u)}, \qquad h \coloneqq v - \lambda u.$$

Probemos que h es ortogonal a u respecto φ. Aplicamos la linealidad de φ respecto al primer argumento:

$$\varphi(h,u) = \varphi(v - \lambda u, u) = \varphi(v,u) - \lambda\varphi(u,u) = \varphi(v,u) - \frac{\varphi(v,u)}{\varphi(u,u)}\,\varphi(u,u) = 0.$$

Por la propiedad hermítica (es decir, conjugadamente simétrica), tenemos también que $\varphi(u,h) = 0$. Para los "catetos" λu, h y la "hipotenusa" v demostremos el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\varphi(v,v) &= \varphi(\lambda u + h, \lambda u + h) = |\lambda|^2\varphi(u,u) + \lambda\underbrace{\varphi(u,h)}_{=0} + \overline{\lambda}\,\underbrace{\varphi(h,u)}_{=0} + \varphi(h,h)\\ &= |\lambda|^2\varphi(u,u) + \varphi(h,h).\end{aligned}$$

Finalmente, usamos la desigualdad $\varphi(h,h) \ge 0$ y sustituimos λ:

$$\varphi(v,v) \ge |\lambda|^2\varphi(u,u) = \frac{|\varphi(u,v)|^2}{\varphi(u,u)}.$$

De aquí se sigue (1).

Ahora consideremos el caso $\varphi(u,u) = 0$. Para cada $t > 0$ pongamos $w_t = tv - \varphi(v,u)u$. Notamos que

$$\varphi\big(tv - \varphi(v,u)u, tv - \varphi(v,u)u\big) = \varphi(w_t, w_t) \ge 0.$$

Desarrollamos la expresión del lado izquierdo por la propiedad sesquilineal:

$$t^2\,\varphi(v,v) - t\,\overline{\varphi(v,u)}\,\varphi(v,u) - t\,\varphi(v,u)\,\varphi(u,v) + \varphi(v,u)\,\varphi(u,v)\,\varphi(u,u) \geq 0.$$

Aplicamos la propiedad conjugadamente simétrica y la suposición que $\varphi(u,u) = 0$:

$$t^2\varphi(v,v) - 2t|\varphi(u,v)|^2 \geq 0.$$

Suponiendo que $t > 0$, dividimos ambos lados entre t:

$$t\varphi(v,v) - 2|\varphi(u,v)|^2 \geq 0.$$

Ahora pasamos al límite cuando t tiende a 0 por la derecha. Obtenemos que $|\varphi(u,v)|^2 = 0$, de donde sale (1). $\square$

Si φ es un producto interno, entonces la demostración se simplifica. En el caso $\varphi(u,u) = 0$ concluimos enseguida que $u = 0_V$ y $\varphi(u,v) = 0$.

Ahora explicaremos otra demostración que utiliza elementos de la teoría de las matrices positivas. En estos apuntes entendemos las frases “matriz positiva” y “forma cuadrática positiva” en el sentido no estricto. En la terminología antigua, se trata de las “matrices no negativamente definidas”. Una matriz M de clase $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se llama *positiva*, si existe una matriz N en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $M = N^*N$. En este caso utilizamos la notación $M \geq 0$. De manera equivalente, una matriz M es positiva, si su forma cuadrática q_M es positiva: $q_M(\xi) = \langle M\xi, \xi\rangle \geq 0$ para cada ξ en $\mathbb{C}^n$. El *criterio de Sylvester* implica que si $M \geq 0$, entonces $\det(M) \geq 0$.

Demostración de la desigualdad de Schwarz con matrices positivas. Sean $u, v \in V$. Consideramos la matriz de Gram asociada a los vectores u, v respecto a φ:

$$M \coloneqq \begin{bmatrix} \varphi(u,u) & \varphi(v,u) \\ \varphi(u,v) & \varphi(v,v) \end{bmatrix}.$$

Denotamos por q_M la forma cuadrática asociada a la matriz M:

$$q_M \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \qquad q_M(\xi) \coloneqq \langle M\xi, \xi\rangle = \xi^* M\xi.$$

Mostremos que esta forma cuadrática es positiva. Primero, escribimos $q_M(\xi)$ en términos de las componentes ξ_1 y ξ_2 del vector ξ:

$$\begin{aligned} q_M(\xi) &= \begin{bmatrix} \overline{\xi_1} & \overline{\xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(u,u) & \varphi(v,u) \\ \varphi(u,v) & \varphi(v,v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\xi_1} & \overline{\xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1\varphi(u,u) + \xi_2\varphi(v,u) \\ \xi_1\varphi(u,v) + \xi_2\varphi(v,v) \end{bmatrix} \\ &= \overline{\xi_1}\xi_1\varphi(u,u) + \overline{\xi_1}\xi_2\varphi(v,u) + \overline{\xi_2}\xi_1\varphi(u,v) + \overline{\xi_2}\xi_2\varphi(v,v). \end{aligned}$$

Aplicamos la suposición que φ es sesquilineal y positiva:

$$q_M(\xi) = \overline{\xi_1}\varphi(\xi_1 u + \xi_2 v) + \overline{\xi_2}\varphi(\xi_1 u + \xi_2 v) = \varphi(\xi_1 u + \xi_2 v, \xi_1 u + \xi_2 v) \geq 0.$$

Esto significa que $M \geq 0$. Por el criterio de Sylvester para las matrices positivas, podemos concluir que $\det(M) \geq 0$. El determinante de M es fácil de calcular:

$$\det(M) = \varphi(u,u)\varphi(v,v) - \varphi(v,u)\varphi(u,v) = \varphi(u,u)\varphi(v,v) - |\varphi(u,v)|^2.$$

Hemos demostrado (1). $\square$