Desigualdad de Schwarz

Objetivos. Demostrar la desigualdad de Schwarz, conocida también como la desigualdad de Cauchy–Bunyakovski–Schwarz, y aclarar su sentido geométrico.

En esta sección suponemos que H es un espacio vectorial complejo con un producto interno.

Ya vimos el siguiente resultado en el tema "Proyección ortogonal de un vector sobre la recta generada por un vector no nulo".

1 Proposición (sobre el complemento ortogonal en la proyección sobre una recta)**.** *Sean $a, b \in H$, $a \neq 0_H$. Pongamos*

$$w = b - \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle}\, a.$$

Entonces $w \perp \ell(a)$.

Demostración. Por las propiedades del producto interno,

$$\langle w, a \rangle = \langle b, a \rangle - \frac{\langle b, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \langle a, a \rangle = 0.$$

Si $x \in \ell(a)$, entonces existe un $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $x = \gamma a$, y $\langle x, w \rangle = \gamma \langle a, w \rangle = 0$. □

2 Proposición (teorema de Pitágoras)**.** *Sean $u, w \in H$ tales que $u \perp w$. Entonces*

$$\langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle.$$

Demostración. Recordamos que

$$\langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle u, w \rangle) + \langle w, w \rangle.$$

La suposición $u \perp w$ significa que $\langle u, w \rangle = 0$ y $\langle w, u \rangle = 0$, y se obtiene el resultado requerido. □

3 Corolario (comparación de la hipotenusa y el cateto en un triángulo rectángulo)**.** *Sean $u, w \in H$ tales que $u \perp w$. Entonces*

$$\langle u + w, u + w \rangle \geq \langle u, u \rangle.$$

4 Teorema (desigualdad de Schwarz)**.** *Sean* $a, b \in H$*. Entonces*

$$|\langle a, b\rangle|^2 \le \langle a, a\rangle\, \langle b, b\rangle. \tag{1}$$

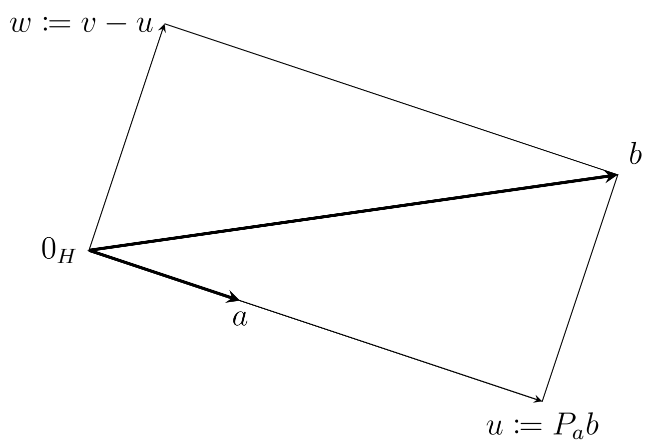
Demostración. Si $a = 0_H$, entonces ambos lados de (1) son cero, y la afirmación se cumple. Supongamos que $a \ne 0_H$. Definimos u como la proyección ortogonal de b sobre a y w como el complemento ortogonal correspondiente:

$$\lambda \coloneqq \frac{\langle b, a\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad u \coloneqq \lambda a, \qquad w \coloneqq b - \lambda a.$$

Entonces $u \in \ell(a)$ y $w \in \ell(a)^\perp$, por eso $u \perp w$. Aplicamos el Corolario 3 y simplificamos la fórmula para $\langle u, u\rangle$:

$$\langle v, v\rangle \ge \langle u, u\rangle = \langle \lambda a, \lambda a\rangle = |\lambda|^2 \langle a, a\rangle = \frac{|\langle a, b\rangle|^2}{\langle a, a\rangle}.$$

Multiplicamos la desigualdad obtenida por $\langle a, a\rangle$ y llegamos al resultado requerido. □



El sentido geométrico de la desigualdad de Schwarz: la longitud del cateto $u = P_a b$ es menor o igual a la longitud de la hipotenusa b.

5 Proposición. *Sean* $a, b \in H$*. Entonces la igualdad*

$$|\langle a, b\rangle|^2 = \langle a, a\rangle\, \langle b, b\rangle \tag{2}$$

se cumple si, y sólo si, los vectores a *y* b *son linealmente dependientes.*

Demostración. En el caso trivial $a = 0_H$ la afirmación es correcta. Consideremos el caso $a \neq 0_H$.

Supongamos que se cumple la igualdad (2). Usando la misma notación que en la demostración del Teorema 4, concluimos que $w = 0_H$, así que $b = u = \lambda a \in \ell(a)$.

Supongamos que a y b son linealmente dependientes. Como $a \neq 0_H$, esto significa que $b \in \ell(a)$. Sea $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $b = \gamma a$. Entonces ambos lados de (2) son iguales a $|\gamma|^2(\langle a, a\rangle)^2$. $\square$