Bases de Schauder

(un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko
www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

17 de marzo de 2022

Objetivos

- Repasar el concepto de bases de Hamel.

Objetivos

- Repasar el concepto de bases de Hamel.
- Mostrar que en espacios normados de dimensión infinita no hay bases de Hamel numerables.

Objetivos

- Repasar el concepto de bases de Hamel.
- Mostrar que en espacios normados de dimensión infinita no hay bases de Hamel numerables.
- Definir bases de Schauder y ver sus propiedades elementales.

Objetivos

- Repasar el concepto de bases de Hamel.
- Mostrar que en espacios normados de dimensión infinita no hay bases de Hamel numerables.
- Definir bases de Schauder y ver sus propiedades elementales.
- Conocer ejemplos espacios con bases de Schauder.

Objetivos

- Repasar el concepto de bases de Hamel.
- Mostrar que en espacios normados de dimensión infinita no hay bases de Hamel numerables.
- Definir bases de Schauder y ver sus propiedades elementales.
- Conocer ejemplos espacios con bases de Schauder.

Aplicación futura (en las próximas clases).

- Veremos que si un espacio normado tiene una base de Schauder, entonces es separable.

Prerrequisitos

Plan

Repaso: base de Hamel

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $A \subseteq V$.

Se dice que A es una base de Hamel de V, si se cumple lo siguiente.

1. El conjunto A es linealmente independiente:
   para cada m en $\mathbb{N}$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_m$, diferentes a pares,
   la lista $(a_1, \ldots, a_m)$ es linealmente independiente.
2. El conjunto A genera al espacio V:
   $$\forall v \in V \qquad m \in \mathbb{N} \qquad \exists a_1, \ldots, a_m \in V \qquad v \in \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m).$$

Ejemplo: una base en el espacio de las sucesiones finitas

Dado $X \subseteq \mathbb{C}$, $\quad \mathcal{F}(\mathbb{N}, X) :=$ el conjunto de las "sucesiones finitas" en X:

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, X) := \Big\{ a \in X^{\mathbb{N}} \colon \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k > m \quad a_k = 0 \Big\}.$$

Ejemplo: una base en el espacio de las sucesiones finitas

Dado $X \subseteq \mathbb{C}$, $\quad \mathcal{F}(\mathbb{N}, X) :=$ el conjunto de las "sucesiones finitas" en X:

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, X) := \Big\{ a \in X^{\mathbb{N}} \colon \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k > m \quad a_k = 0 \Big\}.$$

En particular, $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo.

Se puede ver como subespacio vectorial del espacio normado $\ell^1(\mathbb{N})$.

Ejemplo: una base en el espacio de las sucesiones finitas

Dado $X \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(\mathbb{N}, X) :=$ el conjunto de las "sucesiones finitas" en X:

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, X) := \Big\{ a \in X^{\mathbb{N}} \colon \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k > m \quad a_k = 0 \Big\}.$$

En particular, $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo.
Se puede ver como subespacio vectorial del espacio normado $\ell^1(\mathbb{N})$.

$$e_j := (\delta_{j,k})_{k \in \mathbb{N}},$$

Ejemplo: una base en el espacio de las sucesiones finitas

Dado $X \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(\mathbb{N}, X) :=$ el conjunto de las "sucesiones finitas" en X:

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, X) := \Big\{a \in X^{\mathbb{N}}: \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k > m \quad a_k = 0\Big\}.$$

En particular, $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo.
Se puede ver como subespacio vectorial del espacio normado $\ell^1(\mathbb{N})$.

$$e_j := (\delta_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}, \qquad e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots).$$

Ejemplo: una base en el espacio de las sucesiones finitas

Dado $X \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(\mathbb{N}, X) :=$ el conjunto de las "sucesiones finitas" en X:

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, X) := \Big\{ a \in X^{\mathbb{N}} \colon \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k > m \quad a_k = 0 \Big\}.$$

En particular, $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo.
Se puede ver como subespacio vectorial del espacio normado $\ell^1(\mathbb{N})$.

$$e_j := (\delta_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}, \qquad e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots).$$

Ejercicio. Mostrar que $\{e_j \colon \ j \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$.

Ejercicio

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Ejercicio

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

Ejercicio

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

- Supongamos que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$, a_k diferentes a pares, y $A := \{a_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de V.

Ejercicio

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

- Supongamos que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$, a_k diferentes a pares, y $A := \{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de V.
- Para cada m en $\mathbb{N}$, pongamos $W_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m)$.

Ejercicio

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.
Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

- Supongamos que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$, a_k diferentes a pares, y $A := \{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de V.
- Para cada m en $\mathbb{N}$, pongamos $W_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m)$.
- W_m es denso en ninguna parte: $\operatorname{int}(\operatorname{clos}(W_m)) = \operatorname{int}(W_m) = \emptyset$.

Ejercicio

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

- Supongamos que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$, a_k diferentes a pares, y $A := \{a_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de V.
- Para cada m en $\mathbb{N}$, pongamos $W_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m)$.
- W_m es denso en ninguna parte: $\operatorname{int}(\operatorname{clos}(W_m)) = \operatorname{int}(W_m) = \emptyset$.
- Como A es una base de Hamel, $V = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m$.

Ejercicio

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.
Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

- Supongamos que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$, a_k diferentes a pares, y $A := \{a_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de V.
- Para cada m en $\mathbb{N}$, pongamos $W_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m)$.
- W_m es denso en ninguna parte: $\quad \operatorname{int}(\operatorname{clos}(W_m)) = \operatorname{int}(W_m) = \emptyset$.
- Como A es una base de Hamel, $V = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m$.
- Por el teorema de Baire, V no puede ser una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Contradicción.

Plan

Base de Schauder

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V.

Se dice que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en V si

$$\forall v \in V \qquad \exists!\ \lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \qquad v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k.$$

Base de Schauder

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V.
Se dice que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en V si

$$\forall v \in V \qquad \exists!\ \lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \qquad v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k.$$

La última igualdad se entiende en el siguiente sentido:

$$\lim_{m\to\infty} \left\| v - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right\| = 0.$$

Base de Schauder

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V.

Se dice que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder en V si

$$\forall v \in V \qquad \exists!\ \lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \qquad v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k.$$

La última igualdad se entiende en el siguiente sentido:

$$\lim_{m\to\infty} \left\| v - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k \right\| = 0.$$

Observación: una base de Schauder **no** es un conjunto, es una sucesión.

El orden de los elementos puede ser importante (tarea pequeña).

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V.

Entonces para cada m en $\mathbb{N}$ la lista $(a_1,\ldots,a_m)$ es linealmente independiente.

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_V.$$

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_V.$$

Pongamos $\lambda_k := 0$ para $k > m$. Pongamos $\beta_k := 0$ para cada k.

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_V.$$

Pongamos $\lambda_k \coloneqq 0$ para $k > m$. Pongamos $\beta_k \coloneqq 0$ para cada k. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_V, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k a_k = 0_V.$$

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_V.$$

Pongamos $\lambda_k \coloneqq 0$ para $k > m$. Pongamos $\beta_k \coloneqq 0$ para cada k. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_V, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k a_k = 0_V.$$

Por la unicidad de la descomposición en la base de Schauder, $\lambda = \beta$.

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_V.$$

Pongamos $\lambda_k := 0$ para $k > m$. Pongamos $\beta_k := 0$ para cada k. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0_V, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k a_k = 0_V.$$

Por la unicidad de la descomposición en la base de Schauder, $\lambda = \beta$.

Por consecuencia, $\lambda_k = 0$ para cada k. $\square$

Las combinaciones lineales (finitas) de una base de Schauder forman un subconjunto denso del espacio

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V.
Consideramos

$$W_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m).$$

Entonces $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m$ es denso en V.

Las combinaciones lineales (finitas) de una base de Schauder forman un subconjunto denso del espacio

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V.

Consideramos

$$W_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m).$$

Entonces $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m$ es denso en V.

Demostración.

Sea $v \in V$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que $v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$.

Las combinaciones lineales (finitas) de una base de Schauder forman un subconjunto denso del espacio

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V.

Consideramos

$$W_m := \operatorname{lin}(a_1, \ldots, a_m).$$

Entonces $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m$ es denso en V.

Demostración.

Sea $v \in V$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que $v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$.

Encontramos n en $\mathbb{N}$ tal que $\|v - s_n\| < \varepsilon$, donde $s_n := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$.

Plan

ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$

Proposición

Sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de ℓ^p.

ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$

Proposición

Sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de ℓ^p.

Demostración de la unicidad de descomposición.

Sean $x \in \ell^p$ y $\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tales que $\lim\limits_{m\to\infty} \|x - s_m\|_p = 0$, donde $s_m := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k$.

Fijamos q en $\mathbb{N}$. Si $m \geq q$, entonces $(x - s_m)_q = x_q - \lambda_q$, y

$$|x_q - \lambda_q| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k - \lambda_k|^p \right)^{1/p} \leq \|x - s_m\|_p.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$. Concluimos que $\lambda_q = x_q$.

Demostración de la existencia.

Sea $x \in \ell^p$. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \qquad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p = 0.$$

Demostración de la existencia.

Sea $x \in \ell^p$. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \qquad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p = 0.$$

Pongamos $\lambda_k := x_k$ para cada k en $\mathbb{N}$. Si m en $\mathbb{N}$,

$$s_m := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, 0, \ldots), \qquad (x - s_m)_k = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le m; \\ x_k, & k \ge m+1. \end{cases}$$

Demostración de la existencia.

Sea $x \in \ell^p$. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \qquad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p = 0.$$

Pongamos $\lambda_k := x_k$ para cada k en $\mathbb{N}$. Si m en $\mathbb{N}$,

$$s_m := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, 0, \ldots), \qquad (x - s_m)_k = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le m; \\ x_k, & k \ge m+1. \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{m\to\infty} \|x - s_m\|_p = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} = 0.$$

Ejercicio. Mostrar que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de c_0.

Ejercicio. Mostrar que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de c_0.

Ejercicio interesante. Encontrar una base de Schauder en c.