

Bases de Schauder.
(un tema del curso “Análisis funcional”)

Egor Maximenko

www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

22 de octubre de 2020

- 1 Bases de Hamel
- 2 Bases de Schauder
- 3 Bases de Schauder y separabilidad
- 4 Ejemplos

Repaso: base de Hamel

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $A \subseteq V$.

Se dice que A es una **base de Hamel** de V , si se cumple lo siguiente.

1. El conjunto A es linealmente independiente:

para cada m en \mathbb{N} y cualesquiera a_1, \dots, a_m , diferentes a pares, la lista (a_1, \dots, a_m) es linealmente independiente.

2. el conjunto A genera al espacio V :

$$\forall v \in V \quad m \in \mathbb{N} \quad \exists a_1, \dots, a_m \in V \quad v \in \text{lin}(a_1, \dots, a_m).$$

Ejemplo: una base en el espacio de las sucesiones finitas

Dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(X) :=$ el conjunto de las “sucesiones finitas” en X :

$$\mathcal{F}(X) := \left\{ a \in X^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k > m \quad a_k = 0 \right\}.$$

Ejemplo: una base en el espacio de las sucesiones finitas

Dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(X) :=$ el conjunto de las “sucesiones finitas” en X :

$$\mathcal{F}(X) := \left\{ a \in X^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k > m \quad a_k = 0 \right\}.$$

En particular, $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo.

Se puede ver como subespacio del espacio normado ℓ^1 .

Ejemplo: una base en el espacio de las sucesiones finitas

Dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(X) :=$ el conjunto de las “sucesiones finitas” en X :

$$\mathcal{F}(X) := \left\{ a \in X^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k > m \quad a_k = 0 \right\}.$$

En particular, $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo.

Se puede ver como subespacio del espacio normado ℓ^1 .

$$e_j := (\delta_{j,k})_{k \in \mathbb{N}},$$

Ejemplo: una base en el espacio de las sucesiones finitas

Dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(X) :=$ el conjunto de las “sucesiones finitas” en X :

$$\mathcal{F}(X) := \left\{ a \in X^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k > m \quad a_k = 0 \right\}.$$

En particular, $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo.

Se puede ver como subespacio del espacio normado ℓ^1 .

$$e_j := (\delta_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}, \quad e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots).$$

Ejemplo: una base en el espacio de las sucesiones finitas

Dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(X) :=$ el conjunto de las “sucesiones finitas” en X :

$$\mathcal{F}(X) := \left\{ a \in X^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall k > m \quad a_k = 0 \right\}.$$

En particular, $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo.

Se puede ver como subespacio del espacio normado ℓ^1 .

$$e_j := (\delta_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}, \quad e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots).$$

Ejercicio. Mostrar que $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$.

Un problemita

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un problemita

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

Un problemita

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

- Supongamos que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$, a_k diferentes a pares, y $A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de V .

Un problemita

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

- Supongamos que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$, a_k diferentes a pares, y $A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de V .
- Para cada m en \mathbb{N} , pongamos $W_m := \text{lin}(a_1, \dots, a_m)$.

Un problemita

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

- Supongamos que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$, a_k diferentes a pares, y $A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de V .
- Para cada m en \mathbb{N} , pongamos $W_m := \text{lin}(a_1, \dots, a_m)$.
- W_m es denso en ninguna parte: $\text{int}(\text{clos}(W_m)) = \text{int}(W_m) = \emptyset$.

Un problemita

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

- Supongamos que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$, a_k diferentes a pares, y $A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de V .
- Para cada m en \mathbb{N} , pongamos $W_m := \text{lin}(a_1, \dots, a_m)$.
- W_m es denso en ninguna parte: $\text{int}(\text{clos}(W_m)) = \text{int}(W_m) = \emptyset$.
- Como A es una base Hamel, $V = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m$.

Un problemita

Sea V un espacio de Banach complejo que no tiene base finita.

Demostrar que V no tiene base de Hamel numerable.

Un plan de solución.

- Supongamos que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$, a_k diferentes a pares, y $A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base de Hamel de V .
- Para cada m en \mathbb{N} , pongamos $W_m := \text{lin}(a_1, \dots, a_m)$.
- W_m es denso en ninguna parte: $\text{int}(\text{clos}(W_m)) = \text{int}(W_m) = \emptyset$.
- Como A es una base Hamel, $V = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m$.
- Por el teorema de Baire, V no puede ser una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.

Base de Schauder

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en V .

Se dice que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una **base de Schauder** en V si

$$\forall v \in V \quad \exists! \lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k.$$

Base de Schauder

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en V .

Se dice que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una **base de Schauder** en V si

$$\forall v \in V \quad \exists! \lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k.$$

La última igualdad se entiende en el siguiente sentido:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| v - \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k \right\| = 0.$$

Base de Schauder

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en V .

Se dice que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una **base de Schauder** en V si

$$\forall v \in V \quad \exists! \lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k.$$

La última igualdad se entiende en el siguiente sentido:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| v - \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k \right\| = 0.$$

Observación: una base de Schauder **no** es un conjunto, es una sucesión.
El orden de los elementos puede ser importante (tarea pequeña).

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una base de Schauder en V .

Entonces para cada m en \mathbb{N} la lista (a_1, \dots, a_m) es linealmente independiente.

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = 0_V.$$

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = 0_V.$$

Pongamos $\lambda_k := 0$ para $k > m$. Pongamos $\beta_k := 0$ para cada k .

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = 0_V.$$

Pongamos $\lambda_k := 0$ para $k > m$. Pongamos $\beta_k := 0$ para cada k . Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = 0_V, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k a_k = 0_V.$$

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = 0_V.$$

Pongamos $\lambda_k := 0$ para $k > m$. Pongamos $\beta_k := 0$ para cada k . Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = 0_V, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k a_k = 0_V.$$

Por la unicidad de la descomposición en la base de Schauder, $\lambda = \beta$.

Dada una base de Schauder, sus cortes finitos son l.i.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = 0_V.$$

Pongamos $\lambda_k := 0$ para $k > m$. Pongamos $\beta_k := 0$ para cada k . Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k = 0_V, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k a_k = 0_V.$$

Por la unicidad de la descomposición en la base de Schauder, $\lambda = \beta$.

Por consecuencia, $\lambda_k = 0$ para cada k . □

Las combinaciones lineales (finitas) de una base de Schauder forman un subconjunto denso del espacio

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una base de Schauder en V .

Consideramos

$$W_m := \text{lin}(a_1, \dots, a_m).$$

Entonces $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m$ es denso en V .

Las combinaciones lineales (finitas) de una base de Schauder forman un subconjunto denso del espacio

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una base de Schauder en V .

Consideramos

$$W_m := \text{lin}(a_1, \dots, a_m).$$

Entonces $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m$ es denso en V .

Demostración.

Sea $v \in V$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que $v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$.

Las combinaciones lineales (finitas) de una base de Schauder forman un subconjunto denso del espacio

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una base de Schauder en V .

Consideramos

$$W_m := \text{lin}(a_1, \dots, a_m).$$

Entonces $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m$ es denso en V .

Demostración.

Sea $v \in V$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que $v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$.

Encontramos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|v - s_n\| < \varepsilon$, donde $s_n := \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$.

Bases de Schauder y separabilidad

Proposición

Sea V un espacio normado que tiene una base de Schauder.

Entonces V es separable, es decir, tiene un subconjunto denso numerable.

Bases de Schauder y separabilidad

Proposición

Sea V un espacio normado que tiene una base de Schauder.

Entonces V es separable, es decir, tiene un subconjunto denso numerable.

Inicio de la demostración. Sea $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una base de Schauder en V .

Para cada m en \mathbb{N} ,

$$L_m := \left\{ \sum_{k=1}^m \xi_k a_k : \xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \right\}.$$

Mostremos que el conjunto $D := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} L_m$ es numerable y denso en V .

Demostración: D es numerable

Sabemos que $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^m$ es numerable.

Demostración: D es numerable

Sabemos que $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^m$ es numerable.

$$T_m: (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^m \rightarrow L_m, \quad T_m(\xi) := \sum_{k=1}^m \xi_k a_k.$$

Demostración: D es numerable

Sabemos que $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^m$ es numerable.

$$T_m: (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^m \rightarrow L_m, \quad T_m(\xi) := \sum_{k=1}^m \xi_k a_k.$$

T_m es una función biyectiva, luego L_m es numerable.

Demostración: D es numerable

Sabemos que $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^m$ es numerable.

$$T_m: (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^m \rightarrow L_m, \quad T_m(\xi) := \sum_{k=1}^m \xi_k a_k.$$

T_m es una función biyectiva, luego L_m es numerable.

D es numerable siendo una unión numerable de conjuntos numerables:

$$D := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} L_m.$$

Demostración: D es denso en V

Sean $v \in V$, $\varepsilon > 0$. Aproximamos v por una combinación lineal finita de $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\|v - s_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{donde} \quad s_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k.$$

Demostración: D es denso en V

Sean $v \in V$, $\varepsilon > 0$. Aproximamos v por una combinación lineal finita de $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\|v - s_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{donde} \quad s_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k.$$

Pongamos $M := \sum_{k=1}^n \|a_k\|$.

Demostración: D es denso en V

Sean $v \in V$, $\varepsilon > 0$. Aproximamos v por una combinación lineal finita de $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\|v - s_n\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{donde} \quad s_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k.$$

Pongamos $M := \sum_{k=1}^n \|a_k\|$. Elegimos $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ tales que $|\xi_k - \lambda_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

$$w := \sum_{k=1}^n \xi_k a_k.$$

Entonces $w \in D$ y $\|v - w\| \leq \|v - s_n\| + \|s_n - w\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n |\xi_k - \lambda_k| \|a_k\| < \varepsilon$.

$\ell^p, 1 \leq p < +\infty$

Proposición

Sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de ℓ^p .

$\ell^p, 1 \leq p < +\infty$

Proposición

Sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de ℓ^p .

Demostración de la unicidad de descomposición.

Sean $x \in \ell^p$ y $\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tales que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - s_m\|_p = 0$, donde $s_m := \sum_{k=1}^m \lambda_k e_k$.

Fijamos q en \mathbb{N} . Si $m \geq q$, entonces $(x - s_m)_q = x_q - \lambda_q$, y

$$|x_q - \lambda_q| \leq \left(\sum_{k=1}^m |x_k - \lambda_k|^p \right)^{1/p} \leq \|x - s_m\|_p.$$

Pasamos al límite cuando $m \rightarrow \infty$. Concluimos que $\lambda_q = x_q$.

Demostración de la existencia.

Sea $x \in \ell^p$. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p = 0.$$

Demostración de la existencia.

Sea $x \in \ell^p$. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p = 0.$$

Pongamos $\lambda_k := x_k$ para cada k en \mathbb{N} . Si m en \mathbb{N} ,

$$s_m := \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, 0, \dots), \quad (x - s_m)_k = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq m; \\ x_k, & k \geq m + 1. \end{cases}$$

Demostración de la existencia.

Sea $x \in \ell^p$. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p = 0.$$

Pongamos $\lambda_k := x_k$ para cada k en \mathbb{N} . Si m en \mathbb{N} ,

$$s_m := \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, 0, \dots), \quad (x - s_m)_k = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq m; \\ x_k, & k \geq m + 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - s_m\|_p = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} = 0.$$

Ejercicio. Mostrar que $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de c_0 .

Ejercicio. Mostrar que $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de c_0 .

Ejercicio. Encontrar una base de Schauder en c .

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \quad (a \neq b \implies d(a, b) \geq \delta).$$

Entonces X es no separable.

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \quad (a \neq b \implies d(a, b) \geq \delta).$$

Entonces X es no separable.

Idea de demostración.

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \quad (a \neq b \implies d(a, b) \geq \delta).$$

Entonces X es no separable.

Idea de demostración.

Supongamos que X es separable.

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \quad (a \neq b \implies d(a, b) \geq \delta).$$

Entonces X es no separable.

Idea de demostración.

Supongamos que X es separable. Entonces A es separable.

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \quad (a \neq b \implies d(a, b) \geq \delta).$$

Entonces X es no separable.

Idea de demostración.

Supongamos que X es separable. Entonces A es separable.

Sea D un subconjunto denso en A .

Repaso: espacios métricos no separables

Proposición

Sea X un espacio métrico. Supongamos que existen $\delta > 0$ y un subconjunto A de X tales que A infinito no numerable y

$$\forall a, b \in A \quad (a \neq b \implies d(a, b) \geq \delta).$$

Entonces X es no separable.

Idea de demostración.

Supongamos que X es separable. Entonces A es separable.

Sea D un subconjunto denso en A . Entonces $D = A$.

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A :=$$

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A := \{1_X : X \subseteq \mathbb{N}\}.$$

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A := \{1_X : X \subseteq \mathbb{N}\}.$$

A no es numerable.

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A := \{1_X : X \subseteq \mathbb{N}\}.$$

A no es numerable. Más aún, si $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq Y$, entonces

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A := \{1_X : X \subseteq \mathbb{N}\}.$$

A no es numerable. Más aún, si $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq Y$, entonces $\|1_X - 1_Y\|_\infty = 1$.

El espacio ℓ^∞ no es separable

Proposición

ℓ^∞ no es separable.

Idea de demostración. Sea

$$A := \{1_X : X \subseteq \mathbb{N}\}.$$

A no es numerable. Más aún, si $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq Y$, entonces $\|1_X - 1_Y\|_\infty = 1$.

Corolario

ℓ^∞ no tiene base de Schauder.