Bases de Schauder

Objetivos. Estudiar el concepto de base de Schauder, conocer algunos ejemplos.

Prerrequisitos. Espacios normados, convergencia de series.

1 Definición. Sea V un espacio normado complejo. Una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores en V se llama *base de Schauder* si para cada x en V existe una única sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n b_n - v \right\| = 0.$$

2 Observación. En la definición de base de Schauder se trata de una *sucesión*, no se trata de un *conjunto numerable*. Hay ejemplos cuando $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de un espacio V, $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una permutación y $(b_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ no es una base de Schauder.

3 Proposición. *Sea V un espacio normado complejo y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V. Entonces para cada m en $\mathbb{N}$ la lista $(b_1, \ldots, b_n)$ es linealmente independiente, esto es, para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ en $\mathbb{C}$, si*

$$\sum_{n=1}^{m} \alpha_k b_k = 0_V,$$

entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$.

Demostración. Sean $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Pongamos

$$v \coloneqq \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k.$$

Supongamos que $v = 0_V$. Definimos $\alpha_k \coloneqq 0$ para $k > m$ y pongamos $\xi_k \coloneqq 0$ para cada k en $\mathbb{N}$. Entonces para cada n con $n \ge m$ tenemos

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k = 0_V = \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k,$$

así que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k - v \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k - v \right\| = 0.$$

Por definición de la base de Schauder, la sucesión de coeficientes con esta propiedad se determina de manera única, luego $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En particular, obtenemos $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. $\square$

4 Corolario. *Sea V un espacio normado complejo y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V. Entonces los elementos de la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son distintos a pares y el conjunto $\{b_n\colon\ n\in\mathbb{N}\}$ es linealmente independiente.*

Demostración. 1. Dados $p,q\in\mathbb{N}$ con $p\neq q$, pongamos $m \coloneqq \max\{p,q\}$. Como $(b_1,\ldots,b_m)$ es linealmente independiente, concluimos que $b_p\neq b_q$.

2. Por la definición de la independencia lineal, hay que considerar una lista finita de elementos de $\{b_n\colon\ n\in\mathbb{N}\}$, diferentes a pares. Consideremos una lista $(b_{j_1},\ldots,b_{j_r})$, donde $j_1,\ldots,j_r$ son números naturales son diferentes a pares. Ponemos $m \coloneqq \max\{j_1,\ldots,j_r\}$. Como la lista $(b_1,\ldots,b_m)$ es linealmente independiente, su sublista $(b_{j_1},\ldots,b_{j_r})$ también es linealmente independiente. $\square$

5 Proposición. *Sea V un espacio normado complejo y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder en V. Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos*

$$W_m \coloneqq \ell(b_1,\ldots,b_m).$$

Sea $D \coloneqq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m$. Entonces

$$D = \ell(\{b_n\colon\ n\in\mathbb{N}\})$$

y D es denso en V.

Demostración. 1. La contención $\subseteq$ es obvia. Mostremos la contención $\supseteq$. Dado v en $\ell(\{b_n\colon\ n\in\mathbb{N}\})$, encontramos $j_1,\ldots,j_p\in\mathbb{N}$ tales que $v\in\ell(b_{j_1},\ldots,b_{j_p})$. Pongamos $m \coloneqq \max\{j_1,\ldots,j_r\}$. Entonces $v\in W_m$.

2. Mostremos que D es denso en V. Sean v en V y $\varepsilon>0$. Encontramos una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty}\|s_m - v\| = 0, \qquad \text{donde} \qquad s_m \coloneqq \sum_{n=1}^{m}\alpha_n b_n.$$

Encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que $\|s_m - v\| < \varepsilon$. Finalmente, notamos que $s_m\in W_m\subseteq D$. $\square$

6 Definición. Para cada m en $\mathbb{N}$, denotemos por e_m a la sucesión $(\delta_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

7 Lema. *Sean* $p \in [1, +\infty]$, $x \in \ell^p(\mathbb{N})$, $j \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$|x_j| \le \|x\|_p.$$

8 Proposición. *Para cada* p *en* $[1, +\infty)$, *la sucesión* $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *es una base de Schauder en* $\ell^p(\mathbb{N})$.

Demostración. Existencia de la descomposición. Sea $x \in \ell^p(\mathbb{N})$. Pongamos $\alpha_k \coloneqq x_k$ para cada k en $\mathbb{N}$. Dado n en $\mathbb{N}$, consideremos las siguientes sucesiones:

$$\begin{aligned} s_n &\coloneqq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \big(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots\big), \\ r_n &\coloneqq x - s_n = \big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\big). \end{aligned}$$

De manera más formal,

$$(r_n)_j = \begin{cases} 0, & 1 \le j \le n; \\ x_j, & j > n. \end{cases}$$

Entonces

$$\|r_n\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

La última expresión tiende a cero cuando n tiende a infinito, porque la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ converge.

Unicidad de la descomposición. Supongamos que $x \in \ell^p(\mathbb{N})$, $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_p = 0.$$

Denotemos la suma $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ por s_n. Fijamos j en $\mathbb{N}$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \ge j$ tenemos

$$(x - s_n)_j = x_j - \alpha_k.$$

Aplicamos el Lema 7:

$$|x_j - \alpha_j| \le \|x - s_n\|_p \to 0, \quad n \to \infty.$$

Concluimos que $\alpha_j = x_j$ para cada j. □

9 Proposición. *La sucesión* $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *es una base de Schauder en* $c_0(\mathbb{N})$.

Demostración. Ejercicio. $\square$

10 Ejercicio. Encontrar una base de Schauder en $c(\mathbb{N})$.

11 Proposición. *La sucesión* $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *no es base de Schauder en* $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Demostración. Consideremos la sucesión constante 1:

$$a = (1, 1, \ldots) = (1)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Vamos a demostrar que para cualquier sucesión $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se tiene que

$$\left\| a - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\|_\infty \not\to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

En efecto,

$$\left\| a - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\|_\infty \geq \sup_{k>n} |a_k| = 1.$$

$\square$

Luego vamos a demostrar que:

- cualquier espacio normado con base de Schauder es separable (tiene un subconjunto denso numerable),
- el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no es separable.

De estos dos hechos podremos concluir que en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no hay base de Schauder.