El teorema de Riesz sobre la bola unitaria

(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

8 de noviembre de 2022

Plan

1. Repaso de notación y conceptos
2. El lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria
3. El teorema de Frigyes Riesz sobre las bolas en espacios normados de dimensión infinita

Plan

Notación: bolas cerradas

Dado un espacio normado V, un punto $a \in V$ y un número $r > 0$, denotamos por $C(a,r)$ la bola cerrada con centro a de radio r:

$$C(a,r) \coloneqq \{v \in V\colon\ \|v - a\| \le r\}.$$

Es fácil ver que $C(a,r)$ se obtiene de $C(0_V,1)$ al estirar y desplazar:

$$C(a,r) = a + r\,C(0_V,1).$$

Denotamos por $S(a,r)$ la esfera correspondiente:

$$S(a,r) \coloneqq \{v \in V\colon\ \|v - a\| = r\}.$$

Repaso: las bolas cerradas en $\mathbb{C}^n$ son compactas

Ya sabemos el siguiente hecho.

Repaso: las bolas cerradas en $\mathbb{C}^n$ son compactas

Ya sabemos el siguiente hecho.

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita.

Entonces la bola $C(0_V, 1)$ en V es compacta.

Repaso: las bolas cerradas en $\mathbb{C}^n$ son compactas

Ya sabemos el siguiente hecho.

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita.

Entonces la bola $C(0_V, 1)$ en V es compacta.

Como consecuencia, la esfera $S(0_V, 1)$ en V es compacta.

Repaso: las bolas cerradas en $\mathbb{C}^n$ son compactas

Ya sabemos el siguiente hecho.

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita.

Entonces la bola $C(0_V, 1)$ en V es compacta.

Como consecuencia, la esfera $S(0_V, 1)$ en V es compacta.

Más aún, $C(0_V, 1)$, $S(0_V, 1)$ y $B(0_V, 1)$ son totalmente acotadas.

Repaso: las bolas cerradas en $\mathbb{C}^n$ son compactas

Ya sabemos el siguiente hecho.

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita.

Entonces la bola $C(0_V, 1)$ en V es compacta.

Como consecuencia, la esfera $S(0_V, 1)$ en V es compacta.

Más aún, $C(0_V, 1)$, $S(0_V, 1)$ y $B(0_V, 1)$ son totalmente acotadas.

Las afirmaciones similares se cumplen también para $C(a, r)$, $S(a, r)$, $B(a, r)$.

Repaso: criterio de conjunto no totalmente acotado

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$.

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A no es totalmente acotado;
- existen un número $r > 0$ y una sucesión $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tales que

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \qquad \Big(j \neq k \quad \Longrightarrow \quad d(x_j, x_k) \geq r\Big).$$

La distancia entre un punto y un conjunto (repaso)

En un espacio métrico (en particular, en un espacio normado), si x es un punto y A es un conjunto,

$$d(x, A)$$

La distancia entre un punto y un conjunto (repaso)

En un espacio métrico (en particular, en un espacio normado),
si x es un punto y A es un conjunto,

$$d(x, A) :=$$

La distancia entre un punto y un conjunto (repaso)

En un espacio métrico (en particular, en un espacio normado),
si x es un punto y A es un conjunto,

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

La distancia entre un punto y un conjunto (repaso)

En un espacio métrico (en particular, en un espacio normado), si x es un punto y A es un conjunto,

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Por la definición del ínfimo, si $d(x, A) < +\infty$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe b en A tal que

$$d(x, b) < d(x, A) + \varepsilon.$$

La distancia entre un punto y un conjunto (repaso)

En un espacio métrico (en particular, en un espacio normado), si x es un punto y A es un conjunto,

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Por la definición del ínfimo, si $d(x, A) < +\infty$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe b en A tal que

$$d(x, b) < d(x, A) + \varepsilon.$$

Además, sabemos que

$$x \in \operatorname{clos}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad d(x, A) = 0.$$

Plan

1. Repaso de notación y conceptos
2. El lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria
3. El teorema de Frigyes Riesz sobre las bolas en espacios normados de dimensión infinita

Lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

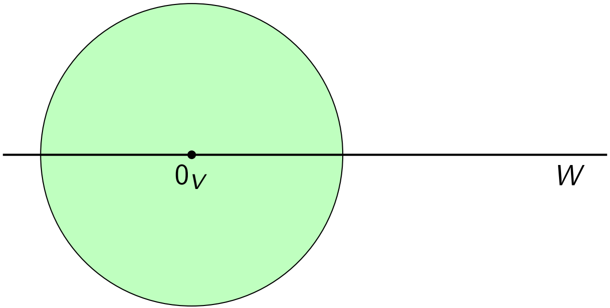
Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V, $W \neq V$, $r \in (0,1)$.

Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.

Lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V, $W \neq V$, $r \in (0, 1)$.

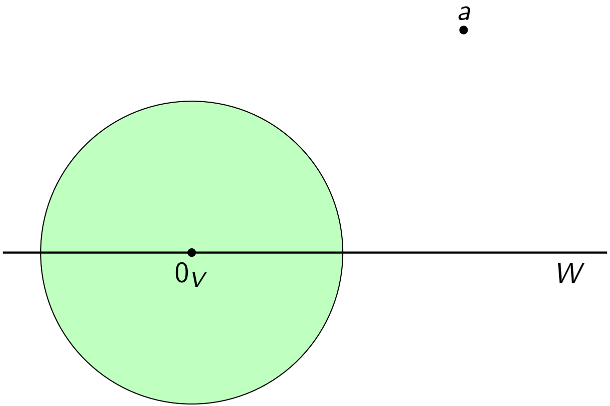
Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.



Lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V, $W \neq V$, $r \in (0, 1)$.

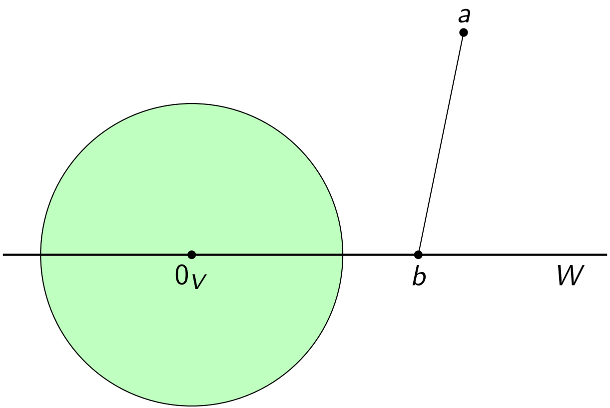
Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.



Lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V, $W \neq V$, $r \in (0, 1)$.

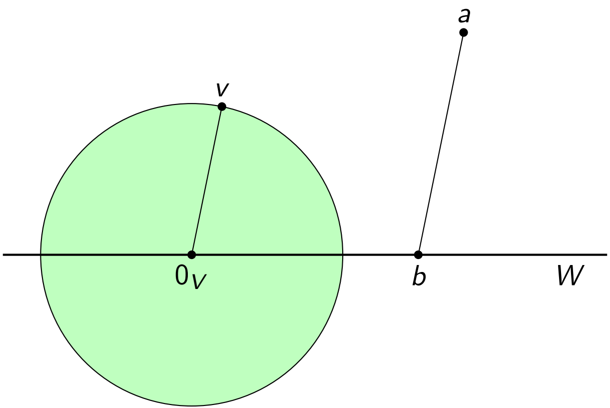
Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.



Lema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V, $W \neq V$, $r \in (0, 1)$.

Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \geq r$.



Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.

Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.
Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.
Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.
Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.
Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$.

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.
Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.
Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| =$$

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.
Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.
Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a-b}{\|a-b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| = \left\| \frac{a-b}{\|a-b\|} - \frac{u-b}{\|a-b\|} \right\| =$$

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.
Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.
Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| = \left\| \frac{a - b}{\|a - b\|} - \frac{u - b}{\|a - b\|} \right\| = \left\| \frac{u - a}{\|a - b\|} \right\| =$$

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.
Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.
Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| = \left\| \frac{a - b}{\|a - b\|} - \frac{u - b}{\|a - b\|} \right\| = \left\| \frac{u - a}{\|a - b\|} \right\| = \frac{\|u - a\|}{\|a - b\|} \geq$$

Demostración del lema de Riesz sobre la esfera unitaria

Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$.
Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{R}{R+\varepsilon} > r$.
Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \varepsilon$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| = \left\| \frac{a - b}{\|a - b\|} - \frac{u - b}{\|a - b\|} \right\| = \left\| \frac{u - a}{\|a - b\|} \right\| = \frac{\|u - a\|}{\|a - b\|} \geq \frac{R}{R + \varepsilon} > r.$$

Plan

Conjuntos totalmente acotados en espacios métricos (repaso)

Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que X es totalmente acotado,
si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $A \subseteq X$ tal que

$$\forall x \in X \qquad d(x, A) < \varepsilon.$$

Un conjunto $Y \subseteq X$ se llama totalmente acotado,
si el espacio $(Y, d|_{Y \times Y})$ es totalmente acotado.

Repaso: criterio de conjuntos no totalmente acotados

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) X no es totalmente acotado.

(b) Existen $\delta > 0$ y $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tales que

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \qquad \Big(j \neq k \qquad \Longrightarrow \qquad d(x_j, x_k) \geq \delta \Big).$$

(c) Existen $\delta > 0$ y $M \subseteq X$ tales que M es infinito y

$$\forall a, b \in M \qquad \big(a \neq b \qquad \Longrightarrow \qquad d(a, b) \geq \delta.$$

Teorema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sea V un espacio normado de dimensión infinita.

Entonces la esfera unitaria cerrada $S(0_V, 1)$ en V no es totalmente acotada.

Teorema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sea V un espacio normado de dimensión infinita.

Entonces la esfera unitaria cerrada $S(0_V, 1)$ en V no es totalmente acotada.

Corolario: la bola cerrada $C(0_V, 1)$ no es totalmente acotada.

Teorema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sea V un espacio normado de dimensión infinita.

Entonces la esfera unitaria cerrada $S(0_V, 1)$ en V no es totalmente acotada.

Corolario: la bola cerrada $C(0_V, 1)$ no es totalmente acotada.

Corolario: la bola cerrada $C(0_V, 1)$ no es compacta.

Teorema de Frigyes Riesz sobre la esfera unitaria

Sea V un espacio normado de dimensión infinita.

Entonces la esfera unitaria cerrada $S(0_V, 1)$ en V no es totalmente acotada.

Corolario: la bola cerrada $C(0_V, 1)$ no es totalmente acotada.

Corolario: la bola cerrada $C(0_V, 1)$ no es compacta.

Corolario: la bola abierta $B(0_V, 1)$ no es totalmente acotada.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0,1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $S \coloneqq S(0_V, 1)$.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0,1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $S \coloneqq S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0,1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están construidos $x_1, \ldots, x_n$. Mostremos cómo construir x_{n+1}.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0,1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $S \coloneqq S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están construidos $x_1, \ldots, x_n$. Mostremos cómo construir x_{n+1}.

Pongamos $W_n \coloneqq \operatorname{lin}(x_1, \ldots, x_n)$.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0,1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $S \coloneqq S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están construidos $x_1, \ldots, x_n$. Mostremos cómo construir x_{n+1}.

Pongamos $W_n \coloneqq \operatorname{lin}(x_1, \ldots, x_n)$. Entonces W_n es cerrado.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0, 1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $S \coloneqq S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están construidos $x_1, \ldots, x_n$. Mostremos cómo construir x_{n+1}.

Pongamos $W_n \coloneqq \operatorname{lin}(x_1, \ldots, x_n)$. Entonces W_n es cerrado.

Como V es de dimensión infinita, $W_n \neq V$.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0,1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $S \coloneqq S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están construidos $x_1, \ldots, x_n$. Mostremos cómo construir x_{n+1}.

Pongamos $W_n \coloneqq \operatorname{lin}(x_1, \ldots, x_n)$. Entonces W_n es cerrado.

Como V es de dimensión infinita, $W_n \neq V$.

Usando el lema de Riesz encontramos x_{n+1} en S tal que

$$d(x_{n+1}, W_n) \geq r.$$

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0,1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están construidos $x_1, \ldots, x_n$. Mostremos cómo construir x_{n+1}.

Pongamos $W_n := \operatorname{lin}(x_1, \ldots, x_n)$. Entonces W_n es cerrado.

Como V es de dimensión infinita, $W_n \neq V$.

Usando el lema de Riesz encontramos x_{n+1} en S tal que

$$d(x_{n+1}, W_n) \geq r.$$

Entonces para cada $k \leq n$ tenemos $\|x_{n+1} - x_k\| \geq r$.

Demostración del teorema de Riesz

Sea $r \in (0,1)$. Vamos a construir por inducción una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $S := S(0_V, 1)$.

Sea $x_1 \in S$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y ya están construidos $x_1, \ldots, x_n$. Mostremos cómo construir x_{n+1}.

Pongamos $W_n := \operatorname{lin}(x_1, \ldots, x_n)$. Entonces W_n es cerrado.

Como V es de dimensión infinita, $W_n \neq V$.

Usando el lema de Riesz encontramos x_{n+1} en S tal que

$$d(x_{n+1}, W_n) \geq r.$$

Entonces para cada $k \leq n$ tenemos $\|x_{n+1} - x_k\| \geq r$.

Obviamente, la sucesión construida tiene la siguiente propiedad:

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \qquad \Big(j \neq k \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_j - x_k\| \geq r\Big).$$

Varias condiciones equivalentes a la condición $\dim(V) < +\infty$

Ejercicio. Recordar la definición es espacio topológico localmente compacto.

Varias condiciones equivalentes a la condición $\dim(V) < +\infty$

Ejercicio. Recordar la definición es espacio topológico localmente compacto.

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo.
Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) V es de dimensión finita,

(b) la bola $C(0_V, 1)$ es compacta,

(c) la bola $C(0_V, 1)$ es totalmente acotada,

(d) cada conjunto acotado en V es totalmente acotado,

(e) cada conjunto cerrado y acotado en V es compacto,

(f) V es localmente compacto.