Teorema de representación de Riesz

Objetivos. Enunciar el teorema de representación de Riesz. Demostrar la unicidad y mostrar la idea de la demostración de la existencia.

Requisitos. Integral de Lebesgue, particiones de unidad.

1. Teorema. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, y sea $\Lambda\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal positivo, esto es, $\Lambda f \geq 0$ para toda $f \geq 0$.

Entonces existe una σ-álgebra $\mathcal{F}$ sobre X que contiene $\mathcal{B}_X$ y existe una única medida positiva μ sobre $\mathcal{F}$ que representa Λ en el sentido que

(a) $\Lambda f = \int\limits_X f\,d\mu \qquad \forall f \in C_c(X)$,

y que tiene las siguientes propiedades adicionales:

(b) $\mu(K) < +\infty$ para todo conjunto compacto $K \subseteq X$.

(c) Para todo $E \in \mathcal{F}$,

$$\mu(E) = \operatorname{ínf}\big\{\mu(V)\colon\ E \subseteq V,\ V \text{ abierto}\big\}.$$

(d) Para todo E abierto y todo $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < +\infty$,

$$\mu(E) = \sup\big\{\mu(K)\colon\ K \subseteq E,\ K \text{ compacto}\big\}.$$

(e) El espacio con medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es completo:

$$\text{si}\quad E \in \mathcal{F},\quad A \subseteq E \quad \text{y} \quad \mu(E) = 0, \quad \text{entonces} \quad A \in \mathcal{F}.$$

2. Demostración de la unicidad. Sean μ_1 y μ_2 medidas que satisfacen (a)–(e). Las condiciones (c) y (d) implican que μ_1 y μ_2 se determinan de manera única por sus valores en conjuntos compactos. Sea K un conjunto compacto, demostremos que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por (b) y (c), existe un abierto $V \subseteq K$ tal que $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. Por el lema de Urysohn, existe una función f tal que $K \prec f \prec V$, por lo tanto

$$\mu_1(K) = \int\limits_X \chi_K\,d\mu_1 \leq \int\limits_X f\,d\mu_1 = \Lambda f = \int\limits_X f\,d\mu_2 \leq \int\limits_X \chi_V\,d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. Intercambiando los papeles de μ_1 y μ_2, obtenemos la desigualdad inversa $\mu_2(K) \leq \mu_1(K)$.

3. Construcción de $\boldsymbol{\mu'}$ para conjuntos abiertos. Para todo abierto V en X, definamos

$$\mu'(V) = \sup\{\Lambda f\colon\ f \prec V\}. \tag{1}$$

Si V_1, V_2 son abiertos y $V_1 \subseteq V_2$, entonces obviamente $\mu'(V_1) \le \mu'(V_2)$. Por lo tanto para todo V_1 abierto tenemos que

$$\mu'(V_1) = \inf\{\mu'(V)\colon\ V_1 \subseteq V,\ V \text{ abierto}\}. \tag{2}$$

4. Construcción de $\boldsymbol{\mu}$ para conjuntos arbitrarios. Para todo $E \subseteq X$ definamos

$$\mu(E) = \inf\{\mu'(V)\colon\ E \subseteq V,\ V \text{ abierto}\}. \tag{3}$$

5. $\boldsymbol{\mu}$ es una extensión de $\boldsymbol{\mu'}$. La fórmula (2) muestra que para todo V_1 abierto, $\mu(V_1) = \mu'(V_1)$. Así que en conjuntos abiertos la función "nueva" μ da el mismo valor que la "vieja" μ'. En otras palabras, μ es una extención de μ'.

Ahora podemos reescribir la fórmula (1) sustituyendo μ' por μ. Para todo V abierto,

$$\mu(V) = \sup\{\Lambda f\colon\ f \prec V\}. \tag{4}$$

En particular, si $f \prec V$, entonces $\Lambda f \le \mu(V)$.

6. Construcción de $\mathfrak{F}$. Aunque hemos definido $\mu(E)$ para todo $E \subseteq X$, vamos a demostrar la propiedad σ-aditiva de μ sólo para una σ-álgebra $\mathfrak{F}$ sobre X.

Sea $\mathfrak{F}_F$ la clase de todos los $E \subseteq X$ tales que $\mu(E) < +\infty$ y

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K)\colon\ K \subseteq E,\ K \text{ compacto}\}. \tag{5}$$

La clase $\mathfrak{F}$ consiste en todos los $E \subseteq X$ tales que $E \cap K \in \mathfrak{F}_F$ para todo compacto K.