Lema de Riesz y el teorema sobre la bola unitaria en espacios normados de dimensión infinita

Objetivos. Demostrar el lema de Riesz y deducir que la bola unitaria en espacios normados de dimensión infinita no es totalmente acotada.

Prerrequisitos. Espacios normados, la distancia de un punto a un conjunto, espacios métricos totalmente acotados, espacios métricos compactos.

1 Lema. *Sea $R > 0$ y sea $r \in (0, 1)$. Entonces existe $\eta > 0$ tal que*

$$\frac{R}{R + \eta} > r.$$

Primera demostración. Consideremos la función $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) := \frac{R}{R + t}.$$

Notemos que f es continua y $f(0) = 1$. Pongamos $\varepsilon := 1-r$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada t con $0 \le t < \delta$ se cumple la desigualdad $1 - \varepsilon < f(t) < 1 + \varepsilon$. En particular, $f(t) > 1 - \varepsilon = r$. Poniendo $\eta = \delta/2$ obtenemos el resultado. □

Segunda demostración. Transformamos la desigualdad $\frac{R}{R+t} > r$ en otras desigualdades equivalentes, despejando t:

$$\frac{R}{R+t} > r \quad\Longleftrightarrow\quad R > (R+t)r \quad\Longleftrightarrow\quad R > Rr + tr$$
$$\Longleftrightarrow\quad R(1-r) > tr \quad\Longleftrightarrow\quad t < \frac{R(1-r)}{r}.$$

Ponemos $\eta := \frac{R(1-r)}{2r}$ y obtenemos una solución. □

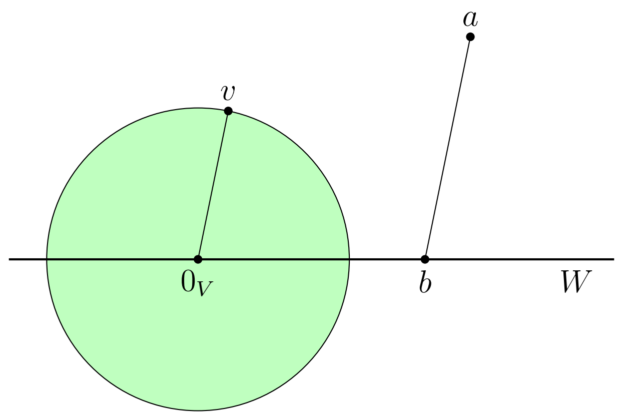
2 Lema (Frigyes Riesz)**.** *Sean V un espacio normado, W un subespacio cerrado de V, $W \ne V$, $r \in (0, 1)$. Entonces existe v en V tal que $\|v\| = 1$ y $d(v, W) \ge r$.*

Demostración. Sea $a \in V \setminus W$. Pongamos $R = d(a, W)$. Entonces $R > 0$. Aplicamos el Lema 1 y elegimos $\eta > 0$ tal que $\frac{R}{R+\eta} > r$. Elegimos b en W tal que $\|a - b\| < R + \eta$. Pongamos

$$v := \frac{a - b}{\|a - b\|}.$$

Demostremos que para cualquier w en W se cumple la desigualdad $\|v - w\| \geq r$. Sea $w \in W$. Consideremos $u = \|a - b\|w + b$. Entonces $u \in W$ y $\|u - a\| \geq R$. Luego

$$\|v - w\| = \left\| \frac{a - b}{\|a - b\|} - \frac{u - b}{\|a - b\|} \right\| = \left\| \frac{u - a}{\|a - b\|} \right\| = \frac{\|u - a\|}{\|a - b\|} \geq \frac{R}{R + \eta} > r. \qquad \square$$



3 Teorema (Frigyes Riesz)**.** *Sea V un espacio normado real o complejo de dimensión infinita. Entonces la esfera unitaria cerrada $S(0, 1)$ en V no es totalmente acotada y no es compacta.*

Demostración. Sea $r \in (0, 1)$. Construiremos por inducción una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $S(0, 1)$. Sea $x_1 \in S(0, 1)$. Supongamos que ya están construidos los vectores $x_1, \ldots, x_p$ con la propiedad $d(x_j, x_k) \geq r$ para cualesquiera j, k en $\{1, \ldots, p\}$ con $j \neq k$. Consideramos el subespacio $W_p := \ell(x_1, \ldots, x_p)$. Notamos que W_p es completo y por lo tanto cerrado en V. Como V no es de dimensión finita, $W_p \neq V$. Usando el Lema 2 encontramos x_{p+1} en $S(0, 1)$ tal que $d(x_{p+1}, W_p) \geq r$. Entonces $d(x_{p+1}, x_j) \geq r$ para cada j en $\{1, \ldots, p\}$.

Es fácil ver que $d(x_j, x_k) \geq r$ para cualesquiera j, k en $\mathbb{N}$ con $j \neq k$. Por el criterio de espacios métricos totalmente acotados, $S(0, 1)$ no es totalmente acotada. $\square$

4 Ejercicio. Sea V un espacio normado de dimensión infinita. Mostrar que la bola unitaria cerrada $\overline{B}(0, 1)$ no es totalmente acotada y la bola unitaria abierta $B(0, 1)$ no es totalmente acotada.