

El lema de Riemann–Lebesgue para los coeficientes de Fourier (un tema de análisis armónico)

Egor Maximenko

<https://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

12 de noviembre de 2024

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente resultado, conocido como el lema de Riemann–Lebesgue.

Teorema

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}_k = 0.$$

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente resultado, conocido como el lema de Riemann–Lebesgue.

Teorema

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}_k = 0.$$

En otras palabras, este teorema afirma que si $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$.

Prerrequisitos.

- Los espacios $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.
- La densidad de $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.
- Los coeficientes de Fourier.
- El indicador de continuidad uniforme (el “módulo de continuidad”).
- La continuidad uniforme de funciones continuas en un intervalo cerrado.

- 1 Repaso de herramientas
- 2 Una fórmula especial para \widehat{f}_k
- 3 El caso $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$
- 4 El caso general, $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

El espacio $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x) \right\}.$$

Funciones medibles 2π -periódicas y la seminorma extendida $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ -álgebra de Lebesgue en \mathbb{R} ,

$\mu :=$ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

Funciones medibles 2π -periódicas y la seminorma extendida $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ -álgebra de Lebesgue en \mathbb{R} ,

$\mu :=$ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

$$\mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x)\}.$$

Funciones medibles 2π -periódicas y la seminorma extendida $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ -álgebra de Lebesgue en \mathbb{R} ,

$\mu :=$ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

$$\mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x)\}.$$

Definimos $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}} : \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \rightarrow [0, +\infty]$,

$$\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) :=$$

Funciones medibles 2π -periódicas y la seminorma extendida $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}$

$\mathcal{F} :=$ la σ -álgebra de Lebesgue en \mathbb{R} ,

$\mu :=$ la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

$$\mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + 2\pi) = f(x)\}.$$

Definimos $\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}} : \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \rightarrow [0, +\infty]$,

$$\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} |f| \, d\mu.$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty \right\}.$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty \right\}.$$

$$\mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0_{\mathbb{R}} \right\}.$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty \right\}.$$

$$\mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0_{\mathbb{R}} \right\}.$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se define como el espacio cociente

$$\mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) / \mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}).$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty \right\}.$$

$$\mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{M}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0_{\mathbb{R}} \right\}.$$

El espacio $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se define como el espacio cociente

$$\mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) / \mathcal{Z}_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}).$$

En lo que sigue, pasamos libremente de $\mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ a $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Aproximación de funciones integrables por funciones continuas

Se sabe el siguiente hecho.

Proposición

Sea $F \in L^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $G \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ tal que

$$\|F - G\|_1 < \varepsilon.$$

Aproximación de funciones integrables por funciones continuas

Se sabe el siguiente hecho.

Proposición

Sea $F \in L^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $G \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ tal que

$$\|F - G\|_1 < \varepsilon.$$

Ejercicio. Demostrar el siguiente resultado.

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1, 2\pi\text{-per}} < \varepsilon.$$

Coeficientes de Fourier

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} f(x) e^{-kix} dx.$$

Coeficientes de Fourier

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} f(x) e^{-kix} dx.$$

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $k \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$|\widehat{f}_k| \leq \|f\|_{1,2\pi\text{-per}}.$$

Coeficientes de Fourier

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Para cada k en \mathbb{Z} ,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} f(x) e^{-kix} dx.$$

Proposición

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $k \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$|\widehat{f}_k| \leq \|f\|_{1,2\pi\text{-per}}.$$

Ejercicio. Recordar la demostración.

El indicador de continuidad uniforme

Dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definimos $\omega_f:]0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty]$,

$$\omega_f(\delta) := \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \right\}.$$

El indicador de continuidad uniforme

Dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definimos $\omega_f:]0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty]$,

$$\omega_f(\delta) := \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \right\}.$$

Más formalmente,

$$\omega_f(\delta) := \sup \left\{ v \in [0, +\infty[: \exists x, y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq \delta \quad \wedge \quad v = |f(x) - f(y)| \right\}.$$

El indicador de continuidad uniforme

Dada una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definimos $\omega_f:]0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty]$,

$$\omega_f(\delta) := \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \right\}.$$

Más formalmente,

$$\omega_f(\delta) := \sup \left\{ v \in [0, +\infty[: \exists x, y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq \delta \quad \wedge \quad v = |f(x) - f(y)| \right\}.$$

Ejercicio. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Demostrar que ω_f es creciente:

$$\forall \delta_1, \delta_2 > 0 \quad \left(\delta_1 < \delta_2 \quad \implies \quad \omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2) \right).$$

El indicador de continuidad uniforme

$$\omega_f(\delta) := \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \right\}.$$

El indicador de continuidad uniforme

$$\omega_f(\delta) := \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \right\}.$$

Observación.

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|).$$

El indicador de continuidad uniforme

$$\omega_f(\delta) := \sup \left\{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \right\}.$$

Observación.

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|).$$

Ejercicio. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Demostrar que

$$f \text{ es uniformemente continua} \iff \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

El indicador de continuidad uniforme de funciones continuas 2π -periódicas

Proposición

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

La restricción $f|_{[0,3\pi]}$ es uniformemente continua.

Demostración, inicio

Sea $\varepsilon > 0$.

La restricción $f|_{[0,3\pi]}$ es uniformemente continua.

Luego existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\forall t, u \in [0, 3\pi] \quad \left(|t - u| \leq \delta_1 \quad \implies \quad |f(t) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Pongamos

$$\delta_2 := \min\{\delta_1, \pi\}.$$

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Consideremos el caso $x \leq y$. El caso $x > y$ es similar.

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Consideremos el caso $x \leq y$. El caso $x > y$ es similar.

Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor.$$

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Consideremos el caso $x \leq y$. El caso $x > y$ es similar.

Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor.$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$ y

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + 2\pi.$$

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Consideremos el caso $x \leq y$. El caso $x > y$ es similar.

Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor.$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$ y

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + 2\pi.$$

Además, como $x \leq y < x + \pi$, tenemos

$$y <$$

Demostración, continuación

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Consideremos el caso $x \leq y$. El caso $x > y$ es similar.

Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor.$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$ y

$$2k\pi \leq x < 2k\pi + 2\pi.$$

Además, como $x \leq y < x + \pi$, tenemos

$$y < 2k\pi + 3\pi.$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \leq x \leq y < 2k\pi + 3\pi.$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \leq x \leq y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \quad u := y - 2k\pi.$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \leq x \leq y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \quad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \leq t \leq u <$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \leq x \leq y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \quad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \leq t \leq u < 3\pi,$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \leq x \leq y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \quad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \leq t \leq u < 3\pi, \quad |u - t| =$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \leq x \leq y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \quad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \leq t \leq u < 3\pi, \quad |u - t| = |x - y| <$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \leq x \leq y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \quad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \leq t \leq u < 3\pi, \quad |u - t| = |x - y| < \delta_2 \leq \delta_1.$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \leq x \leq y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \quad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \leq t \leq u < 3\pi, \quad |u - t| = |x - y| < \delta_2 \leq \delta_1.$$

Por la periodicidad de f y por la selección de δ_1 ,

$$|f(x) - f(y)| =$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \leq x \leq y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \quad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \leq t \leq u < 3\pi, \quad |u - t| = |x - y| < \delta_2 \leq \delta_1.$$

Por la periodicidad de f y por la selección de δ_1 ,

$$|f(x) - f(y)| = |f(t) - f(u)| \leq$$

Demostración, continuación

$$2k\pi \leq x \leq y < 2k\pi + 3\pi.$$

Pongamos

$$t := x - 2k\pi, \quad u := y - 2k\pi.$$

Luego

$$0 \leq t \leq u < 3\pi, \quad |u - t| = |x - y| < \delta_2 \leq \delta_1.$$

Por la periodicidad de f y por la selección de δ_1 ,

$$|f(x) - f(y)| = |f(t) - f(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración, final

Hemos demostrado que

$$\omega_f(\delta_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración, final

Hemos demostrado que

$$\omega_f(\delta_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como ω_f es creciente, para cada $\delta > 0$ con $\delta < \delta_2$ tenemos

$$\omega_f(\delta) \leq \omega_f(\delta_2) < \varepsilon.$$

Lema

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Entonces,

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right) e^{-iky} dy.$$

Demostración. Consideremos la integral que define \widehat{f}_k :

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Demostración. Consideremos la integral que define \widehat{f}_k :

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k =$$

Demostración. Consideremos la integral que define \widehat{f}_k :

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}$$

Demostración. Consideremos la integral que define \widehat{f}_k :

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{2\pi - \pi/k}$$

Demostración. Consideremos la integral que define \widehat{f}_k :

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{2\pi - \pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right)$$

Demostración. Consideremos la integral que define \widehat{f}_k :

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{2\pi - \pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) e^{-ik(y + \pi/k)}$$

Demostración. Consideremos la integral que define \widehat{f}_k :

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{2\pi-\pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) e^{-ik(y+\pi/k)} dy =$$

Demostración. Consideremos la integral que define \widehat{f}_k :

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Hagamos el cambio de variable $x = y + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{2\pi-\pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) e^{-ik(y+\pi/k)} dy = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) e^{-iky} dy.$$

Sumamos la igualdad (1), luego dividimos entre 2.

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right) e^{-iky} dy.$$

Lema

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}_k = 0.$$

Demostración

Empezamos con la fórmula

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right) e^{-iky} dy.$$

Demostración

Empezamos con la fórmula

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right) e^{-iky} dy.$$

Acotamos la integral usando ω_f :

$$|\widehat{f}_k| \leq$$

Demostración

Empezamos con la fórmula

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right) e^{-iky} dy.$$

Acotamos la integral usando ω_f :

$$|\widehat{f}_k| \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right| dy \leq$$

Demostración

Empezamos con la fórmula

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right) e^{-iky} dy.$$

Acotamos la integral usando ω_f :

$$|\widehat{f}_k| \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right| dy \leq \frac{1}{2} \omega_f\left(\frac{\pi}{|k|}\right).$$

Demostración

Empezamos con la fórmula

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right) e^{-iky} dy.$$

Acotamos la integral usando ω_f :

$$|\widehat{f}_k| \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y) \right| dy \leq \frac{1}{2} \omega_f\left(\frac{\pi}{|k|}\right).$$

Como $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, la última expresión tiende a 0 cuando $|k|$ tiende a infinito.

Estamos listos para considerar el caso general de f
en el teorema/lema de Riemann–Lebesgue.

Estamos listos para considerar el caso general de f en el teorema/lema de Riemann–Lebesgue.

Teorema

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}_k = 0.$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$.

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{g}_k = 0$.

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \left(|k| \geq m \quad \implies \quad |\widehat{g}_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Luego para cada k en \mathbb{Z} con $|k| \geq m$ obtenemos

$$|\widehat{f}_k| =$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \left(|k| \geq m \quad \implies \quad |\widehat{g}_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Luego para cada k en \mathbb{Z} con $|k| \geq m$ obtenemos

$$|\widehat{f}_k| = |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k + \widehat{g}_k| \leq$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \left(|k| \geq m \quad \implies \quad |\widehat{g}_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Luego para cada k en \mathbb{Z} con $|k| \geq m$ obtenemos

$$|\widehat{f}_k| = |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k + \widehat{g}_k| \leq |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k| + |\widehat{g}_k| \leq$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \left(|k| \geq m \quad \implies \quad |\widehat{g}_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Luego para cada k en \mathbb{Z} con $|k| \geq m$ obtenemos

$$|\widehat{f}_k| = |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k + \widehat{g}_k| \leq |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k| + |\widehat{g}_k| \leq \|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} + |\widehat{g}_k|$$

Demostración

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ya sabemos que $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{g}_k = 0$. Encontramos $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \left(|k| \geq m \quad \implies \quad |\widehat{g}_k| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Luego para cada k en \mathbb{Z} con $|k| \geq m$ obtenemos

$$|\widehat{f}_k| = |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k + \widehat{g}_k| \leq |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k| + |\widehat{g}_k| \leq \|f - g\|_{1,2\pi\text{-per}} + |\widehat{g}_k| < \varepsilon.$$

Otro camino de demostración

Ejercicio. Sean $a, b \in [0, 2\pi]$, $a < b$. Consideramos $g \in \mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que

$$\forall x \in [0, 2\pi[\quad g(x) = 1_{[a,b[}(x).$$

Calcular \widehat{g}_k para cada k en \mathbb{Z} . Mostrar que

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |\widehat{g}_k| = 0.$$

Otro camino de demostración

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$.

Mostrar que existen n en \mathbb{N} ,

g_1, \dots, g_n , como en el ejercicio anterior,

y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en \mathbb{C} , tales que

$$\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j g_j - f \right) < \varepsilon.$$

Otro camino de demostración

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{L}^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$.

Mostrar que existen n en \mathbb{N} ,

g_1, \dots, g_n , como en el ejercicio anterior,

y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en \mathbb{C} , tales que

$$\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j g_j - f \right) < \varepsilon.$$

Ejercicio. Demostrar el teorema usando los dos ejercicios anteriores.

Coeficientes de Fourier de funciones suaves

Se puede demostrar que si f es suave, entonces \widehat{f}_k tiende a 0 de manera rápida.