Lema de Riemann–Lebesgue para los coeficientes de Fourier

Teorema 1. *Sea* $f \in L^1_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$*. Entonces*

$$\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}_k = 0. \tag{1}$$

Lema 2. *Sea* $f \in C_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$*. Entonces se tiene* (1)*.*

Demostración. Para cada k en $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, consideremos la integral que define $\widehat{f}_k$ y hagamos el cambio de variable $y = x + \frac{\pi}{k}$:

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/k}^{2\pi+\pi/k} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k(y+\pi/k)}\, \mathrm{d}y.$$

La función debajo de la integral es 2π-periódica, por eso podemos integrar sobre $[0, 2\pi)$. Usando la igualdad $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi} = -1$ obtenemos

$$\widehat{f}_k = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ky}\, \mathrm{d}y.$$

A esta igualdad le sumamos la igualdad que define $\widehat{f}_k$, y dividimos entre 2. Obtenemos

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y)\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ky}\, \mathrm{d}y.$$

Como f es continua, la función dentro de la integral tiende a cero de manera uniforme en $[0, 2\pi]$:

$$\lim_{|k|\to\infty} \sup_{y\in[0,2\pi]} \left| f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) - f(y)\right| = 0.$$

Luego se tiene (1). $\square$

Demostremos el lema de Riemann-Lebesgue usando la aproximación de funciones integrables por funciones continuas.

Demostración. Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Para cada $\varepsilon > 0$ encontramos $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $\|f - g\|_{1,2\pi} < \varepsilon/2$. Luego, aplicando el Lema 2 a g, encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que para cada k en $\mathbb{Z}$ con $|k| \geqslant m$ se tiene que $|\widehat{g}_k| < \varepsilon/2$. Luego para cada k en $\mathbb{Z}$ con $|k| \geqslant m$ obtenemos $|\widehat{f}_k| < \varepsilon$. $\square$