# El lema de Riemann–Lebesgue (para las funciones integrables en la recta real)

**Ejemplo 1.** Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, y sea $f = \mathbb{1}_{(\alpha,\beta)}$. Entonces

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\alpha\xi} - \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\beta\xi}}{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi}, & \xi \neq 0; \\ \beta - \alpha, & \xi = 0. \end{cases}$$

Notemos que $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, esto es, la función $\widehat{f}$ es continua y $\lim\limits_{\xi \to \pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

**Proposición 2** (sobre la densidad de las funciones simples en $L^1(\mathbb{R})$, repaso)**.** *Denotemos por $\mathcal{S}_0$ al conjunto de todas las funciones de la forma*

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{1}_{A_k},$$

*donde $m \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $A_k$ es Lebesgue-medible en $\mathbb{R}$ y $\mu(A_k) < +\infty$ para cada $k$ en $\{1, \ldots, m\}$. Entonces, $\mathcal{S}_0$ es un subconjunto denso de $L^1(\mathbb{R})$.*

*Idea de demostración.* Este hecho es cierto para cualquier espacio de medida; lo aplicamos para $\mathbb{R}$ con la $\sigma$-álgebra de Lebesgue $\mathcal{F}$ y con la medida de Lebesgue $\mu$.

1. Si $B \in \mathcal{F}$ y $\mu(B) < +\infty$, entonces $\mathbb{1}_B \in L^1(\mathbb{R})$. Además, $L^1(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Por lo tanto, $\mathcal{S}_0 \subseteq L^1(\mathbb{R})$.

2. Queremos demostrar que cualquier función $f$ de la clase $L^1(\mathbb{R})$ se aproxima por las funciones del conjunto $\mathcal{S}_0$. Empecemos con el caso cuando $f$ es positiva, esto es, $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu, [0, +\infty))$. Para cada $n$ en $\mathbb{N}$ definimos $g_n \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ como

$$g_n(x) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}, & f(x) < n; \\ n, & f(x) \geq n. \end{cases}$$

Es fácil verificar que $g_n \in \mathcal{S}_0$. Además, se puede probar que para cada $x$ en $\mathbb{R}$ la sucesión $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y tiende a $f(x)$. Por el teorema de la convergencia monótona,

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_n \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu,$$

esto es, $\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\|_1 = 0$.

3. Consideremos el caso general, $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu, \mathbb{C})$. Podemos escribir $f$ como una combinación lineal de cuatro funciones positivas $h_1 - h_2 + \mathrm{i}(h_3 - h_4)$, donde $h_1, h_2, h_3, h_4 \in L^1(\mathbb{R}, \mu, [0, +\infty))$. A cada una de las funciones $h_1, h_2, h_3, h_4$ aplicamos el resultado del inciso 2, y obtenemos el resultado. □

**Proposición 3** (sobre la densidad de las funciones escalonadas en $L^1(\mathbb{R})$)**.** *Denotemos por $\mathcal{S}_1$ al conjunto de todas las funciones de la forma*

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{1}_{(\alpha_k,\beta_k)},$$

*donde $m \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_k < \beta_k$ para cada $k$ en $\{1, \ldots, m\}$. Entonces, $\mathcal{S}_1$ es un subconjunto denso de $L^1(\mathbb{R})$.*

*Demostración.* Vamos a demostrar que $\mathcal{S}_0 \subseteq \operatorname{clos}(\mathcal{S}_1)$. Entonces, debido al Lema 2, tendremos que $\operatorname{clos}(\mathcal{S}_0) = \operatorname{clos}(\mathcal{S}_1) = L^1(\mathbb{R})$.

Primero, supongamos que $f = \mathbb{1}_A$, donde $A \in \mathcal{F}$ y $\mu(A) < +\infty$, y sea $\varepsilon > 0$. Usando la propiedad regular de la medida de Lebesgue, encontramos un conjunto $B$ abierto tal que $A \subseteq B$ y $\mu(B \setminus A) < \varepsilon/2$. Notemos que $B$ se puede representar como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos. Las longitudes de estos intervalos forman una sucesión que converge a 0. Denotemos por $C$ a la unión de los primeros $p$ intervalos de esta sucesión, donde $p$ está elegido de tal manera que $\mu(B \setminus C) < \varepsilon/2$. Entonces,

$$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C) = (B \setminus A) \cup (B \setminus C),$$

y

$$\mu(A \triangle C) \le \mu(B \setminus A) + \mu(B \setminus C) < \varepsilon.$$

Luego

$$\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_C\|_1 = \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus A) = \mu(A \triangle C) < \varepsilon.$$

En general, cada elemento de $\mathcal{S}_0$ es una combinación lineal finita de la forma

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{1}_{A_k}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la primera parte de la demostración, para cada $k$ en $\{1, \ldots, m\}$ encontramos un conjunto $D_k$ que sea una unión finita disjunta de intervalos abiertos y tal que

$$\|\mathbb{1}_{A_k} - \mathbb{1}_{D_k}\|_1 < \frac{1}{m(|c_k| + 1)}.$$

Pongamos

$$g \coloneqq \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbb{1}_{D_k}.$$

Entonces, $g \in \mathcal{S}_1$ y $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. $\square$

**Lema 4.** *Sea* $g \in \mathcal{S}_1$. *Entonces,*

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{g}(\xi) = 0.$$

*Demostración.* Se sigue del Ejemplo 1, usando la propiedad lineal de la transformada de Fourier y la propiedad lineal del límite. $\square$

**Teorema 5** (el lema de Riemann–Lebesgue)**.** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Entonces,*

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

*Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, aplicamos la Proposición 3 y encontramos $g$ en $\mathcal{S}_1$ tal que $\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$. Notamos que para cada $\xi$ en $\mathbb{R}$,

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| \le \|\mathcal{F}(f-g)\|_{\sup} \le \|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usando el Lema 4, encontramos $L > 0$ tal que para cada $\xi$ con $|\xi| > L$

$$|\widehat{g}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego para cada $\xi$ en $\mathbb{R}$ con $|\xi| > L$ tenemos que

$$|\widehat{f}(\xi)| \le |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| < \varepsilon.$$

$\square$