Definición de espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Este tema está redactado por Egor Maximenko en junio del 2022.

Sea X un conjunto. Recordemos que $\mathbb{C}^X$ es el conjunto de las funciones $X \to \mathbb{C}$. Por definición, la igualdad de dos funciones se entiende punto a punto:

$$f = g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in X \quad f(x) = g(x).$$

Las operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$ se definen punto a punto:

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

Es fácil ver que $\mathbb{C}^X$ con estas operaciones lineales es un espacio vectorial complejo.

Escribimos $W \le \mathbb{C}^X$, si W es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{C}^X$. En otras palabras, la notación $W \le \mathbb{C}^X$ significa que los elementos de W son funciones $X \to \mathbb{C}$, la función constante cero (definida en X) pertenece a W, y el conjunto W es cerrado bajo las operaciones lineales definidas punto a punto.

1 Definición. Sea X un conjunto y sea H un espacio de Hilbert. Decimos que H es un espacio de Hilbert de funciones en el dominio X, si $H \le \mathbb{C}^X$.

Aclaración sobre el uso de las palabras: en la definición anterior, H no es necesariamente el espacio de *todas* las funciones $X \to \mathbb{C}$.

2 Definición. Sea X un conjunto y sea H un espacio de Hilbert de funciones en el dominio X. Una familia $(K_x)_{x \in X}$ en H se llama *núcleo reproductor* si

$$\forall x \in X \qquad \forall f \in H \qquad f(x) = \langle f, K_x \rangle.$$

3 Definición. Sea X un conjunto y sea H un espacio de Hilbert tal que $H \le \mathbb{C}^X$. Se dice que H es un *EHNR*, si en H existe un núcleo reproductor. En esta situación decimos también que H es un EHNR sobre el dominio X.

4 Observación. La definición de EHNR tiene muchas condiciones incluidas. Cuando decimos que H es un EHNR sobre X, estamos afirmando lo siguiente.

- Cada elemento de H es una función $X \to \mathbb{C}$.
- Las operaciones lineales en H se definen punto a punto.
- En H está dado un producto interno.

- H es completo respecto a este producto interno.
- Existe una familia $(K_x)_{x\in X}$ en H tal que

$$\forall x \in X \qquad \forall f \in H \qquad f(x) = \langle f, K_x\rangle.$$

5 Proposición (unicidad del núcleo reproductor en un punto)**.** *Sea H un espacio de Hilbert de funciones sobre un dominio X, sea $x \in X$ y sean $g, h \in H$ tales que*

$$\forall f \in H \qquad \Big(f(x) = \langle f, g\rangle \quad \wedge \quad f(x) = \langle f, h\rangle\Big).$$

Entonces $g = h$.

Demostración. Para cada f en H, tenemos

$$\langle f, g - h\rangle = \langle f, g\rangle - \langle f, h\rangle = 0.$$

Pongamos $f = g - h$. Entonces

$$\langle g - h, g - h\rangle = 0.$$

Concluimos que $g = h$. □

6 Proposición (unicidad del núcleo reproductor)**.** *Sea H un espacio de Hilbert de funciones sobre un dominio X, sea $(K_x)_{x\in X}$ un núcleo reproductor en H y sea $(L_x)_{x\in X}$ un núcleo reproductor en H. Entonces $K_x = L_x$ para cada x en X.*

Demostración. Es un corolario de la proposición anterior. Se recomienda repetir la demostración, jugando con K_x y L_x en vez de g y h. □

En el resto de esta sección suponemos que H es un EHNR sobre X, y $(K_x)_{x\in X}$ es el NR de H.

7 Proposición (los valores del núcleo reproductor en términos del producto interno)**.** *Para cada x, y en X,*

$$K_x(y) = \langle K_x, K_y\rangle.$$

Demostración. Aplicar la propiedad reproductora a la función $f = K_x$ en el punto y. □

8 Proposición (la propiedad hermitiana del núcleo reproductor)**.** *Para cada x, y en X,*

$$K_y(x) = \overline{K_x(y)}.$$

Demostración. $\langle K_y, K_x\rangle = \overline{\langle K_x, K_y\rangle}$. □

9 Proposición (la norma del núcleo reproductor en términos de sus valores)**.** *Para cada x en X,*

$$\|K_x\|^2 = K_x(x).$$

Demostración. Es un corolario de la Proposición 7. $\square$

En lo que sigue, denotamos por 0_H el vector cero del espacio H, es decir, la función constante cero definida en X.

10 Lema. *El conjunto $\{K_x\colon\ x \in X\}$ tiene la propiedad total:*

$$\{f \in H\colon \quad \forall x \in X \quad f \perp K_x\} = \{0_H\}.$$

Demostración. Denotemos $\{K_x\colon\ x \in X\}$ por S. Queremos demostrar que $S^\perp = \{0_H\}$. La contención $\supseteq$ es obvia. Demostremos la contención $\subseteq$. Supongamos que $f \in S^\perp$. Entonces para cada x en X, por la propiedad reproductora,

$$f(x) = \langle f, K_x\rangle = 0.$$

Esto significa que $f = 0_H$. $\square$

Dado un conjunto Y en un espacio vectorial, denotamos por $\ell(Y)$ el subespacio vectorial generado por Y, es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de los elementos de Y.

11 Proposición. *El conjunto $\ell(\{K_x\colon\ x \in X\})$ es denso en H.*

Demostración. Sea $S \coloneqq \{K_x\colon\ x \in X\}$. En la teoría general de espacios de Hilbert, usando el teorema de la proyección ortogonal, demostramos la siguiente propiedad:

$$\operatorname{clos}(\ell(S)) = (S^\perp)^\perp.$$

En nuestro caso $S^\perp = \{0_H\}$, por eso $(S^\perp)^\perp = H$. $\square$