Representación de funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert (teorema de Riesz–Fréchet)

Rocio Daniela Pérez Cruz, Paolo Alejandro Balam Aguilar Mata, Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

13 de febrero de 2023

Plan

Plan

Objetivos

Dado un espacio de Hilbert H, demostrar que todos los funcionales lineales acotados en H son de la forma

$$\varphi_a(x) := \langle x, a \rangle \qquad (x, a \in H).$$

Prerrequisitos

- Funcionales lineales acotados en espacios normados.
- Correspondencia entre los funcionales lineales acotados y sus núcleos.
- Proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert.

Plan

Repaso: el espacio dual de un espacio normado

Definición

Sea V un espacio normado complejo. Se define el espacio dual de V como:

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sea $a \in H$. Definimos $\varphi_a \colon H \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\varphi_a(x) := \langle x, a \rangle \,.$$

Entonces $\varphi_a \in H^*$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|$. Más aún,

$$a \in \ker(\varphi_a)^\perp, \qquad \varphi_a(a) = \|a\|^2.$$

Demostración: la propiedad lineal de φ_a

Mostremos que φ_a es un funcional lineal.

Demostración: la propiedad lineal de φ_a

Mostremos que φ_a es un funcional lineal.

Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\varphi_a(\lambda x + y)$$

Demostración: la propiedad lineal de φ_a

Mostremos que φ_a es un funcional lineal.

Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\varphi_a(\lambda x + y) =$$

Demostración: la propiedad lineal de φ_a

Mostremos que φ_a es un funcional lineal.

Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\varphi_a(\lambda x + y) = \langle \lambda x + y, a \rangle$$

Demostración: la propiedad lineal de φ_a

Mostremos que φ_a es un funcional lineal.

Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\varphi_a(\lambda x + y) = \langle \lambda x + y, a \rangle =$$

Demostración: la propiedad lineal de φ_a

Mostremos que φ_a es un funcional lineal.

Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\varphi_a(\lambda x + y) = \langle \lambda x + y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle$$

Demostración: la propiedad lineal de φ_a

Mostremos que φ_a es un funcional lineal.

Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\varphi_a(\lambda x + y) = \langle \lambda x + y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle =$$

Demostración: la propiedad lineal de φ_a

Mostremos que φ_a es un funcional lineal.

Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\varphi_a(\lambda x + y) = \langle \lambda x + y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle = \lambda \, \varphi_a(x) + \varphi_a(y).$$

Demostración: la propiedad lineal de φ_a

Mostremos que φ_a es un funcional lineal.

Sean $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\varphi_a(\lambda x + y) = \langle \lambda x + y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle = \lambda \varphi_a(x) + \varphi_a(y).$$

Hemos usado la propiedad lineal del producto interno respecto al primer argumento.

Demostración: $\|\varphi_a\| \leq \|a\|$

Por la desigualdad de Schwarz,

$$|\varphi_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|x\| \, \|a\|.$$

Demostración: $\|\varphi_a\| \leq \|a\|$

Por la desigualdad de Schwarz,

$$|\varphi_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|x\| \, \|a\|.$$

Luego

$$\|\varphi_a\| = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|.$$

Demostración: $\|\varphi_a\| \leq \|a\|$

Por la desigualdad de Schwarz,

$$|\varphi_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|x\| \, \|a\|.$$

Luego

$$\|\varphi_a\| = \sup_{\substack{x\in H \\ x\neq 0_H}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|} \leq \|a\|.$$

Hemos mostrado que $\varphi_a \in H^*$ y $\|\varphi_a\| \leq \|a\|$.

Demostración: $\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Por la definición de la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a)$$

Demostración: $\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Por la definición de la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a) =$$

Demostración: $\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Por la definición de la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a) = \langle a, a \rangle$$

Demostración: $\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Por la definición de la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a) = \langle a, a \rangle =$$

Demostración: $\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Por la definición de la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2.$$

Luego

$$\|\varphi_a\|$$

Demostración: $\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Por la definición de la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a) = \langle a, a\rangle = \|a\|^2.$$

Luego

$$\|\varphi_a\| =$$

Demostración: $\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Por la definición de la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2.$$

Luego

$$\|\varphi_a\| = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|}$$

Demostración: $\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Por la definición de la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2.$$

Luego

$$\|\varphi_a\| = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|} \geq$$

Demostración: $\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Por la definición de la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a) = \langle a, a\rangle = \|a\|^2.$$

Luego

$$\|\varphi_a\| = \sup_{\substack{x\in H\\ x\neq 0_H}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|} \geq \frac{\varphi_a(a)}{\|a\|} = \|a\|.$$

Demostración: $\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Por la definición de la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a) = \langle a, a\rangle = \|a\|^2.$$

Luego

$$\|\varphi_a\| = \sup_{\substack{x\in H\\ x\neq 0_H}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|} \geq \frac{\varphi_a(a)}{\|a\|} = \|a\|.$$

Hemos mostrado que $\|\varphi_a\| = \|a\|$.

Demostración: $\ker(\varphi_a) = \{a\}^{\perp}$

Calculemos el núcleo de a:

$$\ker(\varphi_a)$$

Demostración: $\ker(\varphi_a) = \{a\}^\perp$

Calculemos el núcleo de a:

$$\ker(\varphi_a) =$$

Demostración: $\ker(\varphi_a) = \{a\}^\perp$

Calculemos el núcleo de a:

$$\ker(\varphi_a) = \left\{h \in H \colon \ \varphi_a(h) = 0\right\}$$

Demostración: $\ker(\varphi_a) = \{a\}^{\perp}$

Calculemos el núcleo de a:

$$\ker(\varphi_a) = \left\{h \in H\colon\ \varphi_a(h) = 0\right\} =$$

Demostración: $\ker(\varphi_a) = \{a\}^{\perp}$

Calculemos el núcleo de a:

$$\ker(\varphi_a) = \{h \in H\colon\ \varphi_a(h) = 0\} = \{h \in H\colon\ \langle h, a\rangle = 0\}$$

Demostración: $\ker(\varphi_a) = \{a\}^\perp$

Calculemos el núcleo de a:

$$\ker(\varphi_a) = \{h \in H\colon\ \varphi_a(h) = 0\} = \{h \in H\colon\ \langle h, a\rangle = 0\} =$$

Demostración: $\ker(\varphi_a) = \{a\}^\perp$

Calculemos el núcleo de a:

$$\ker(\varphi_a) = \left\{h \in H\colon\ \varphi_a(h) = 0\right\} = \{h \in H\colon\ \langle h, a\rangle = 0\} = \{h \in H\colon\ h \perp a\}$$

Demostración: $\ker(\varphi_a) = \{a\}^\perp$

Calculemos el núcleo de a:

$$\ker(\varphi_a) = \{h \in H\colon\ \varphi_a(h) = 0\} = \{h \in H\colon\ \langle h, a\rangle = 0\} = \{h \in H\colon\ h \perp a\} =$$

Demostración: $\ker(\varphi_a) = \{a\}^\perp$

Calculemos el núcleo de a:

$$\ker(\varphi_a) = \{h \in H\colon\ \varphi_a(h) = 0\} = \{h \in H\colon\ \langle h, a\rangle = 0\} = \{h \in H\colon\ h \perp a\} = \{a\}^\perp.$$

Demostración: $\ker(\varphi_a) = \{a\}^\perp$

Calculemos el núcleo de a:

$$\ker(\varphi_a) = \{h \in H\colon\ \varphi_a(h) = 0\} = \{h \in H\colon\ \langle h, a\rangle = 0\} = \{h \in H\colon\ h \perp a\} = \{a\}^\perp.$$

Como $h \perp a$ para cada h en $\ker(\varphi_a)$,

$$a \in \ker(\varphi_a)^\perp.$$

Lema

Sean $a \in H \setminus \{0_H\}$, $\psi \in H^*$ tales que se cumplen las propiedades

$$a \in \ker(\psi)^\perp, \qquad \psi(a) = \|a\|^2.$$

Entonces $\psi = \varphi_a$.

Demostración

Sea $x \in H$ arbitrario. Queremos probar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$.

Demostración

Sea $x \in H$ arbitrario. Queremos probar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$.

Consideramos

$$y := \psi(x)a - \psi(a)x.$$

Demostración

Sea $x \in H$ arbitrario. Queremos probar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$.

Consideramos

$$y := \psi(x)a - \psi(a)x.$$

Entonces

$$\psi(y)$$

Demostración

Sea $x \in H$ arbitrario. Queremos probar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$.

Consideramos

$$y := \psi(x)a - \psi(a)x.$$

Entonces

$$\psi(y) =$$

Demostración

Sea $x \in H$ arbitrario. Queremos probar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$.

Consideramos

$$y := \psi(x)a - \psi(a)x.$$

Entonces

$$\psi(y) = \psi(x)\psi(a) - \psi(a)\psi(x)$$

Demostración

Sea $x \in H$ arbitrario. Queremos probar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$.

Consideramos

$$y := \psi(x)a - \psi(a)x.$$

Entonces

$$\psi(y) = \psi(x)\psi(a) - \psi(a)\psi(x) =$$

Demostración

Sea $x \in H$ arbitrario. Queremos probar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$.

Consideramos

$$y := \psi(x)a - \psi(a)x.$$

Entonces

$$\psi(y) = \psi(x)\psi(a) - \psi(a)\psi(x) = 0.$$

Esto significa que $y \in \ker(\psi)$.

Demostración

Sea $x \in H$ arbitrario. Queremos probar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$.

Consideramos

$$y := \psi(x)a - \psi(a)x.$$

Entonces

$$\psi(y) = \psi(x)\psi(a) - \psi(a)\psi(x) = 0.$$

Esto significa que $y \in \ker(\psi)$.

Por la hipótesis, $a \in \ker(\psi)^\perp$.

Demostración

Sea $x \in H$ arbitrario. Queremos probar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$.

Consideramos

$$y := \psi(x)a - \psi(a)x.$$

Entonces

$$\psi(y) = \psi(x)\psi(a) - \psi(a)\psi(x) = 0.$$

Esto significa que $y \in \ker(\psi)$.

Por la hipótesis, $a \in \ker(\psi)^{\perp}$.

Entonces

$$\langle y, a \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $\langle y, a \rangle = 0$.

Hemos mostrado que $\langle y, a \rangle = 0$. Esto significa que

$$0 = \langle y, a \rangle$$

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$0 = \langle y, a\rangle =$$

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$0 = \langle y, a\rangle = \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle$$

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$\begin{aligned} 0 = \ &\langle y, a\rangle \ = \ \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle \\ = \ & \end{aligned}$$

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$0 = \langle y, a\rangle = \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle$$
$$= \psi(x)\langle a, a\rangle - \psi(a)\langle x, a\rangle$$

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$0 = \langle y, a\rangle = \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle$$

$$= \psi(x)\langle a, a\rangle - \psi(a)\langle x, a\rangle =$$

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$
\begin{aligned}
0 = \langle y, a\rangle &= \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle \\
&= \psi(x)\langle a, a\rangle - \psi(a)\langle x, a\rangle = \psi(x)\|a\|^2 - \|a\|^2\langle x, a\rangle
\end{aligned}
$$

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle y, a\rangle = \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle \\ &= \psi(x)\langle a, a\rangle - \psi(a)\langle x, a\rangle = \psi(x)\|a\|^2 - \|a\|^2\langle x, a\rangle \\ &= \end{aligned}$$

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$\begin{aligned}
0 = \ \langle y, a\rangle \ &= \ \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle \\
&= \psi(x)\,\langle a, a\rangle - \psi(a)\,\langle x, a\rangle \ = \psi(x)\|a\|^2 - \|a\|^2\,\langle x, a\rangle \\
&= \|a\|^2\,(\psi(x) - \langle x, a\rangle).
\end{aligned}$$

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$\begin{aligned} 0 = \ \langle y, a\rangle \ &= \ \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle \\ &= \psi(x)\langle a, a\rangle - \psi(a)\langle x, a\rangle \ = \psi(x)\|a\|^2 - \|a\|^2\langle x, a\rangle \\ &= \|a\|^2(\psi(x) - \langle x, a\rangle). \end{aligned}$$

Por la hipótesis, $a \neq 0_H$.

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$\begin{aligned}0 = \ \langle y, a\rangle \ &= \ \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle \\ &= \psi(x)\langle a, a\rangle - \psi(a)\langle x, a\rangle \ = \psi(x)\|a\|^2 - \|a\|^2\langle x, a\rangle \\ &= \|a\|^2\left(\psi(x) - \langle x, a\rangle\right).\end{aligned}$$

Por la hipótesis, $a \neq 0_H$. Luego $\|a\| > 0$.

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$
\begin{aligned}
0 = \ \langle y, a\rangle \ &= \ \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle \\
&= \psi(x)\,\langle a, a\rangle - \psi(a)\,\langle x, a\rangle \ = \psi(x)\|a\|^2 - \|a\|^2\,\langle x, a\rangle \\
&= \|a\|^2\,(\psi(x) - \langle x, a\rangle).
\end{aligned}
$$

Por la hipótesis, $a \neq 0_H$. Luego $\|a\| > 0$. Concluimos que

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$\begin{aligned} 0 = \ \langle y, a\rangle \ &= \ \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle \\ &= \psi(x)\,\langle a, a\rangle - \psi(a)\,\langle x, a\rangle \ = \psi(x)\|a\|^2 - \|a\|^2\,\langle x, a\rangle \\ &= \|a\|^2\,(\psi(x) - \langle x, a\rangle). \end{aligned}$$

Por la hipótesis, $a \neq 0_H$. Luego $\|a\| > 0$. Concluimos que

$$\psi(x)$$

Hemos mostrado que $\langle y, a\rangle = 0$. Esto significa que

$$\begin{aligned} 0 = \ \langle y, a\rangle \ &= \ \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle \\ &= \psi(x)\,\langle a, a\rangle - \psi(a)\,\langle x, a\rangle \ = \psi(x)\|a\|^2 - \|a\|^2\,\langle x, a\rangle \\ &= \|a\|^2\,(\psi(x) - \langle x, a\rangle). \end{aligned}$$

Por la hipótesis, $a \neq 0_H$. Luego $\|a\| > 0$. Concluimos que

$$\psi(x) =$$

Hemos mostrado que $\langle y, a \rangle = 0$. Esto significa que

$$\begin{aligned} 0 = \langle y, a \rangle &= \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a \rangle \\ &= \psi(x) \langle a, a \rangle - \psi(a) \langle x, a \rangle = \psi(x)\|a\|^2 - \|a\|^2 \langle x, a \rangle \\ &= \|a\|^2 (\psi(x) - \langle x, a \rangle). \end{aligned}$$

Por la hipótesis, $a \neq 0_H$. Luego $\|a\| > 0$. Concluimos que

$$\psi(x) = \langle x, a \rangle .$$

Plan

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert y sea $\psi \in H^*$. Entonces $\exists\,!\, a \in H$ tal que

$$\forall\, x \in H \qquad \psi(x) = \langle x, a \rangle\,.$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $a, b \in H$ y

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle .$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $a, b \in H$ y

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle .$$

Entonces

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a - b \rangle = 0.$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $a, b \in H$ y

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle \, .$$

Entonces

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a - b \rangle = 0.$$

Esto significa que

$$a - b$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $a, b \in H$ y

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle .$$

Entonces

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a - b \rangle = 0.$$

Esto significa que

$$a - b \in$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $a, b \in H$ y

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle \,.$$

Entonces

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a - b \rangle = 0.$$

Esto significa que

$$a - b \in H^{\perp}$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $a, b \in H$ y

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle\,.$$

Entonces

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a - b \rangle = 0.$$

Esto significa que

$$a - b \in H^{\perp} =$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $a, b \in H$ y

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle .$$

Entonces

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a - b \rangle = 0.$$

Esto significa que

$$a - b \in H^{\perp} = \{0_H\}.$$

Demostración de la unicidad

Supongamos que $a, b \in H$ y

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle \,.$$

Entonces

$$\forall x \in H \qquad \langle x, a - b \rangle = 0.$$

Esto significa que

$$a - b \in H^{\perp} = \{0_H\}.$$

Concluimos que $a = b$.

Demostración de la existencia, inicio

Si $\psi = 0_{H\to\mathbb{C}}$, entonces ponemos $a = 0_H$.

Demostración de la existencia, inicio

Si $\psi = 0_{H \to \mathbb{C}}$, entonces ponemos $a = 0_H$.

Consideremos el caso $\psi \neq 0_{H \to \mathbb{C}}$.

Demostración de la existencia, inicio

Si $\psi = 0_{H\to\mathbb{C}}$, entonces ponemos $a = 0_H$.

Consideremos el caso $\psi \neq 0_{H\to\mathbb{C}}$.

Vamos a construir un vector a que satisfaga

$$a \in \ker(\psi)^{\perp}, \qquad \psi(a) = \|a\|^2.$$

Demostración de la existencia, inicio

Si $\psi = 0_{H\to\mathbb{C}}$, entonces ponemos $a = 0_H$.

Consideremos el caso $\psi \neq 0_{H\to\mathbb{C}}$.

Vamos a construir un vector a que satisfaga

$$a \in \ker(\psi)^\perp, \qquad \psi(a) = \|a\|^2.$$

Luego por el lema saldrá $\psi = \varphi_a$.

Demostración de la existencia, continuación

Denotemos

$$S := \ker(\psi).$$

Demostración de la existencia, continuación

Denotemos

$$S := \ker(\psi).$$

Como ψ es un funcional lineal acotado, S es un subespacio cerrado de H.

Demostración de la existencia, continuación

Denotemos

$$S := \ker(\psi).$$

Como ψ es un funcional lineal acotado, S es un subespacio cerrado de H.

Como $\psi \neq 0_{H\to\mathbb{C}}$, concluimos que $S \neq H$.

Demostración de la existencia, continuación

Denotemos

$$S := \ker(\psi).$$

Como ψ es un funcional lineal acotado, S es un subespacio cerrado de H.

Como $\psi \neq 0_{H \to \mathbb{C}}$, concluimos que $S \neq H$.

Elegimos $v \in H \setminus S$. Descomponemos v en la suma

$$v = u + w, \qquad u \in S, \quad w \in S^{\perp}.$$

Demostración de la existencia, continuación

Denotemos

$$S := \ker(\psi).$$

Como ψ es un funcional lineal acotado, S es un subespacio cerrado de H.

Como $\psi \neq 0_{H\to\mathbb{C}}$, concluimos que $S \neq H$.

Elegimos $v \in H \setminus S$. Descomponemos v en la suma

$$v = u + w, \qquad u \in S, \quad w \in S^{\perp}.$$

Entonces podemos ver que $\psi(w) = \psi(u + w) = \psi(v) \neq 0$.

Demostración de la existencia, continuación

Denotemos

$$S := \ker(\psi).$$

Como ψ es un funcional lineal acotado, S es un subespacio cerrado de H.

Como $\psi \neq 0_{H\to\mathbb{C}}$, concluimos que $S \neq H$.

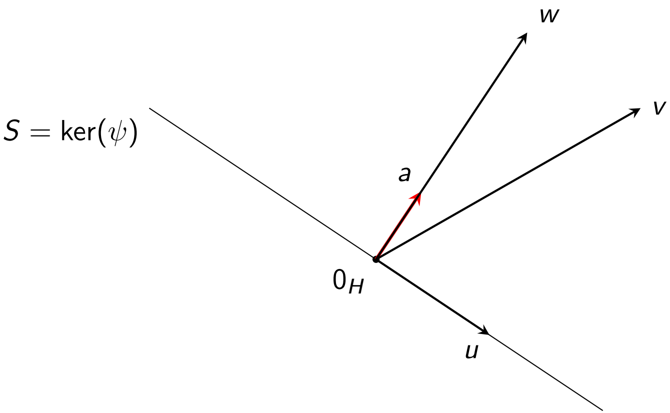
Elegimos $v \in H \setminus S$. Descomponemos v en la suma

$$v = u + w, \qquad u \in S, \quad w \in S^\perp.$$

Entonces podemos ver que $\psi(w) = \psi(u + w) = \psi(v) \neq 0$.

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

El sentido geométrico del vector a



Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)}w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2}h.$$

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)} w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2} h.$$

Entonces $\quad \psi(h) = 1,$

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)}w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2}h.$$

Entonces $\quad \psi(h) = 1, \quad h \in S^\perp,$

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)} w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2} h.$$

Entonces $\psi(h) = 1, \quad h \in S^\perp, \quad a \in S^\perp,$

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)} w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2} h.$$

Entonces $\quad \psi(h) = 1, \quad h \in S^\perp, \quad a \in S^\perp, \quad \|a\| = \dfrac{1}{\|h\|}$

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)} w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2} h.$$

Entonces $\quad \psi(h) = 1, \quad h \in S^\perp, \quad a \in S^\perp, \quad \|a\| = \dfrac{1}{\|h\|} \quad$ y

$$\psi(a)$$

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)} w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2} h.$$

Entonces $\quad \psi(h) = 1, \quad h \in S^\perp, \quad a \in S^\perp, \quad \|a\| = \dfrac{1}{\|h\|} \quad$ y

$$\psi(a) =$$

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)} w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2} h.$$

Entonces $\quad \psi(h) = 1, \quad h \in S^\perp, \quad a \in S^\perp, \quad \|a\| = \dfrac{1}{\|h\|} \quad$ y

$$\psi(a) = \frac{\psi(h)}{\|h\|^2}$$

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)}w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2}h.$$

Entonces $\quad \psi(h) = 1, \quad h \in S^\perp, \quad a \in S^\perp, \quad \|a\| = \dfrac{1}{\|h\|} \quad$ y

$$\psi(a) = \frac{\psi(h)}{\|h\|^2} =$$

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)} w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2} h.$$

Entonces $\quad \psi(h) = 1, \quad h \in S^\perp, \quad a \in S^\perp, \quad \|a\| = \dfrac{1}{\|h\|} \quad$ y

$$\psi(a) = \frac{\psi(h)}{\|h\|^2} = \frac{1}{\|h\|^2}$$

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)} w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2} h.$$

Entonces $\quad \psi(h) = 1, \quad h \in S^\perp, \quad a \in S^\perp, \quad \|a\| = \dfrac{1}{\|h\|} \quad$ y

$$\psi(a) = \frac{\psi(h)}{\|h\|^2} = \frac{1}{\|h\|^2} =$$

Demostración de la existencia, continuación

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

$$h := \frac{1}{\psi(w)}w, \qquad a := \frac{1}{\|h\|^2}h.$$

Entonces $\quad \psi(h) = 1, \quad h \in S^{\perp}, \quad a \in S^{\perp}, \quad \|a\| = \dfrac{1}{\|h\|} \quad$ y

$$\psi(a) = \frac{\psi(h)}{\|h\|^2} = \frac{1}{\|h\|^2} = \|a\|^2.$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a)$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) =$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a)$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) =$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) = 0,$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$.

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego

$$0$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego

$$0 =$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego

$$0 = \langle x - \lambda a, a \rangle$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego

$$0 = \langle x - \lambda a, a\rangle =$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego

$$0 = \langle x - \lambda a, a\rangle = \langle x, a\rangle - \lambda\|a\|^2$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego

$$0 = \langle x - \lambda a, a\rangle = \langle x, a\rangle - \lambda\|a\|^2 =$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego

$$0 = \langle x - \lambda a, a \rangle = \langle x, a \rangle - \lambda \|a\|^2 = \langle x, a \rangle - \psi(x).$$

Demostración directa que $\psi = \varphi_a$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$.

Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego

$$0 = \langle x - \lambda a, a \rangle = \langle x, a \rangle - \lambda \|a\|^2 = \langle x, a \rangle - \psi(x).$$

Esto implica que $\psi(x) = \langle x, a \rangle$.

Plan

Correspondencia entre un espacio de Hilbert y su dual

Corolario

Sea H un espacio de Hilbert. Definimos $\Phi\colon H \to H^*$ mediante la regla

$$\Phi(a) := \varphi_a.$$

Entonces la función Φ es biyectiva, aditiva, homogénea conjugada e isométrica.

Correspondencia entre un espacio de Hilbert y su bidual

Corolario

Sea H un espacio de Hilbert. Definimos $\Lambda\colon H \to H^{**}$ mediante la regla

$$\Lambda(a)(\psi) := \psi(a).$$

Entonces Λ es un isomorfismo isométrico.