Representación de funcionales lineales acotados en espacios de Hilbert (teorema de Riesz–Fréchet)

Rocio Daniela Pérez Cruz, Paolo Alejandro Balam Aguilar Mata,
con sugerencias de Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

14 de diciembre de 2020

Plan

Plan

El espacio dual

Definición

Sea V un espacio normado complejo. Se define el espacio dual de V como:

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sea $a \in H$. Definimos $\varphi_a \colon H \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\varphi_a(x) := \langle x, a \rangle .$$

Entonces $\varphi_a \in H^*$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|$. Más aún,

$$a \in \ker(\varphi_a)^{\perp}, \qquad \varphi_a(a) = \|a\|^2.$$

Propiedad lineal

En efecto, notemos que φ_a es un funcional lineal.

Propiedad lineal

En efecto, notemos que φ_a es un funcional lineal.

Para $x, y \in H$ y $r \in \mathbb{C}$

$$\varphi_a(rx + y) = \langle rx + y, a \rangle = r \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle = r\varphi_a(x) + \varphi_a(y).$$

$\|\varphi_a\| \leq \|a\|$

Por la desigualdad de Schwarz, el funcional φ_a es acotado:

$$|\varphi_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|x\|\,\|a\|.$$

$$\|\varphi_a\| = \sup_{\substack{x\in H\\ x\neq 0_H}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|} \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi_a\| \leq \|a\|.$$

$\|\varphi_a\| \le \|a\|$

Por la desigualdad de Schwarz, el funcional φ_a es acotado:

$$|\varphi_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \le \|x\|\,\|a\|.$$

$$\|\varphi_a\| = \sup_{\substack{x\in H\\ x\ne 0_H}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|} \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi_a\| \le \|a\|.$$

Hemos mostrado que $\varphi_a \in H^*$.

$\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Además, por como se define la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2,$$

y

$$\|\varphi_a\| = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|} \geq \frac{\varphi_a(a)}{\|a\|} = \|a\|.$$

$\|\varphi_a\| \geq \|a\|$

Además, por como se define la norma a través del producto interno,

$$\varphi_a(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2,$$

y

$$\|\varphi_a\| = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0_H}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|} \geq \frac{\varphi_a(a)}{\|a\|} = \|a\|.$$

Hemos mostrado $\|\varphi_a\| = \|a\|$.

$\ker(\varphi_a)$

Ahora, notemos que

$$\ker(\varphi_a) = \{h \in H \mid \varphi_a(h) = 0\} = \{h \in H \mid \langle h, a \rangle = 0\} = \{h \in H \mid h \perp a\} = \{a\}^{\perp}.$$

Como $h \perp a$ para cada $h \in \ker(\varphi_a)$,

$$a \in \ker(\varphi_a)^{\perp}.$$

Lema

Sean $a \in H \setminus \{0_H\}$, $\psi \in H^*$ tales que se cumplen las propiedades

$$a \in \ker(\psi)^{\perp}, \qquad \psi(a) = \|a\|^2.$$

Entonces $\psi = \varphi_a$.

Demostración

Sea $x \in H$ arbitrario. Queremos probar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$.

Demostración

Sea $x \in H$ arbitrario. Queremos probar que $\psi(x) = \varphi_a(x)$.

Damos $y := \psi(x)a - \psi(a)x$. Notemos que $y \in \ker(\psi)$ pues

$$\psi(y) = \psi(x)\psi(a) - \psi(a)\psi(x) = 0.$$

Por la hipótesis, $a \in \ker(\psi)^\perp$. Entonces

$$\langle y, a\rangle = 0.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle y, a\rangle \\
&= \langle \psi(x)a - \psi(a)x, a\rangle \\
&= \psi(x)\langle a, a\rangle - \psi(a)\langle x, a\rangle \\
&= \psi(x)\|a\|^2 - \psi(a)\langle x, a\rangle \\
&= \psi(x)\psi(a) - \psi(a)\langle x, a\rangle \\
&= \psi(a)(\psi(x) - \langle x, a\rangle).
\end{aligned}$$

Por la hipótesis, $\psi(a) = \|a\|^2 > 0$, así que

$$\psi(x) = \langle x, a\rangle .$$

Plan

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert y sea $\psi \in H^*$. Entonces $\exists\,!\, a \in H$ tal que

$$\forall\, x \in H \qquad \psi(x) = \langle x, a \rangle\,.$$

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert y sea $\psi \in H^*$. Entonces $\exists\,!\, a \in H$ tal que

$$\forall\ x \in H \qquad \psi(x) = \langle x, a \rangle\,.$$

Demostración.

Unicidad.

Si $a, b \in H$ y $\psi(x) = \langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle$ para cada x, entonces $\langle x, a \rangle - \langle x, b \rangle = 0$, así que $\langle x, a - b \rangle = 0$ para cada $x \in H$, entonces

$$a - b \in H^{\perp} = \{0_H\} \ y \ a = b.$$

Existencia.

Si $\psi = 0_{H\to\mathbb{C}}$, entonces ponemos $a = 0_H$.

Consideremos el caso $\psi \neq 0_{H\to\mathbb{C}}$. Vamos a construir un vector a que satisfaga

$$a \in \ker(\psi)^\perp, \qquad \psi(a) = \|a\|^2.$$

Existencia.

Si $\psi = 0_{H \to \mathbb{C}}$, entonces ponemos $a = 0_H$.

Consideremos el caso $\psi \neq 0_{H \to \mathbb{C}}$. Vamos a construir un vector a que satisfaga

$$a \in \ker(\psi)^{\perp}, \qquad \psi(a) = \|a\|^2.$$

luego por el Lema saldrá $\psi = \varphi_a$.

Denotemos
$$S := \ker(\psi).$$

Como ψ es un funcional lineal acotado, S es un subespacio cerrado de H.

Y también como $\psi \neq 0_{H\to\mathbb{C}}$, $S \neq H$.

Denotemos

$$S := \ker(\psi).$$

Como ψ es un funcional lineal acotado, S es un subespacio cerrado de H.
Y también como $\psi \neq 0_{H\to\mathbb{C}}, S \neq H$.

Elegimos $v \in H \setminus S$. Descomponemos v en la suma

$$v = u + w, \qquad u \in S, \quad w \in S^{\perp}.$$

Entonces podemos ver que $\psi(w) = \psi(u + w) = \psi(v) \neq 0$.

Denotemos

$$S := \ker(\psi).$$

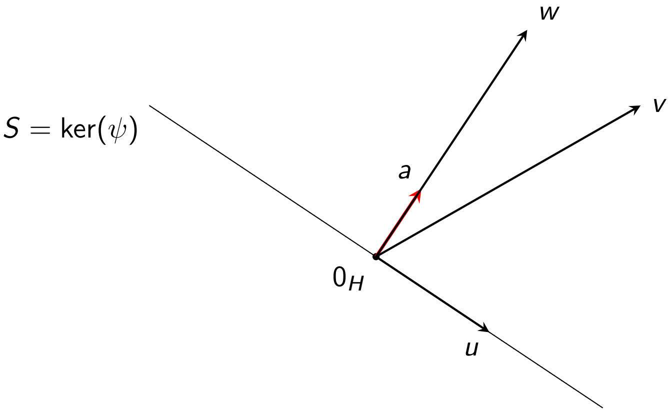
Como ψ es un funcional lineal acotado, S es un subespacio cerrado de H.
Y también como $\psi \neq 0_{H\to\mathbb{C}}, S \neq H$.

Elegimos $v \in H \setminus S$. Descomponemos v en la suma

$$v = u + w, \qquad u \in S, \quad w \in S^\perp.$$

Entonces podemos ver que $\psi(w) = \psi(u + w) = \psi(v) \neq 0$.

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.


$S = \ker(\psi)$
w
v
a
0_H
u

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

Primero pongamos

$$h = \frac{1}{\psi(w)} w.$$

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

Primero pongamos

$$h = \frac{1}{\psi(w)} w.$$

De esta forma, tenemos que $\psi(h) = 1$. Ahora definamos a de la siguiente manera:

$$a = \frac{1}{\|h\|^2} h.$$

Vamos a construir el vector a como un múltiplo del vector w.

Primero pongamos

$$h = \frac{1}{\psi(w)} w.$$

De esta forma, tenemos que $\psi(h) = 1$. Ahora definamos a de la siguiente manera:

$$a = \frac{1}{\|h\|^2} h.$$

Entonces $\quad a \in S^{\perp}, \quad \|a\| = \dfrac{1}{\|h\|} \quad$ y

$$\psi(a) = \frac{\psi(h)}{\|h\|^2} = \frac{1}{\|h\|^2} = \|a\|^2.$$

Dado $x \in H$, pongamos $\lambda = \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}$. Entonces

$$\psi(x - \lambda a) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|a\|^2}\psi(a) = 0,$$

así que $x - \lambda a \in S$. Luego

$$0 = \langle x - \lambda a, a \rangle = \langle x, a \rangle - \lambda \|a\|^2 = \langle x, a \rangle - \psi(x).$$

$\therefore \psi(x) = \langle x, a \rangle$

Plan

Corolario (sobre la correspondencia entre un espacio de Hilbert y su dual).

Sea H un espacio de Hilbert. Definimos $\Phi : H \to H^*$ mediante la regla

$$\Phi(a) := \varphi_a.$$

Entonces la función Φ es biyectiva, aditiva, homogénea conjugada e isométrica.

Corolario (sobre el bidual de un espacio de Hilbert).

Sea H un espacio de Hilbert. Definimos $\Lambda : H \to H^{**}$ mediante la regla

$$\Lambda(a)(\psi) := \psi(a).$$

Entonces Λ es un isomorfismo isométrico.