Convolución de sucesiones sumables

Isidro Paulino Basurto,
con sugerencias de Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

15 de enero de 2021

Objetivos y prerrequisitos

La convolución de dos sucesiones a, b de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$ es una sucesión, denotada por $a * b$, cuya j-ésima componente es

$$(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k.$$

Objetivos y prerrequisitos

La convolución de dos sucesiones a, b de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$ es una sucesión, denotada por $a * b$, cuya j-ésima componente es

$$(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k.$$

Objetivos. Estudiar las propiedades principales de esta operación $*$.

Objetivos y prerrequisitos

La convolución de dos sucesiones a, b de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$ es una sucesión, denotada por $a * b$, cuya j-ésima componente es

$$(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k.$$

Objetivos. Estudiar las propiedades principales de esta operación $*$.

Prerrequisitos: el espacio $\ell^1(\mathbb{Z})$, series convergentes y absolutamente convergentes.

Plan

1. Justificación de la definición
2. Ejemplos
3. Propiedades algebraicas principales
4. El teorema de convolución para el grupo $\mathbb{Z}$

Justificación de la definición

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k} b_k| < +\infty.$$

Como consecuencia, converge la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k.$$

Demostración

Notemos primero que para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$|a_{j-k}||b_k| \leqslant |a_{j-k}| \, \|b\|_1.$$

Demostración

Notemos primero que para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$|a_{j-k}||b_k| \leqslant |a_{j-k}| \, \|b\|_1 .$$

Luego

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k} b_k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}||b_k|$$

Demostración

Notemos primero que para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$|a_{j-k}||b_k| \leqslant |a_{j-k}| \, \|b\|_1.$$

Luego

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k} b_k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}||b_k| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}| \, \|b\|_1.$$

Demostración

Notemos primero que para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$|a_{j-k}||b_k| \leqslant |a_{j-k}| \, \|b\|_1.$$

Luego

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k} b_k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}||b_k| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}| \, \|b\|_1.$$

Haciendo el cambio de variable $n = j - k$ obtenemos:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k} b_k| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_n| \sum_{m\in\mathbb{Z}} |b_m| = \|a\|_1 \, \|b\|_1.$$

Demostración

Notemos primero que para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$|a_{j-k}||b_k| \leqslant |a_{j-k}| \, \|b\|_1.$$

Luego

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k} b_k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}||b_k| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}| \, \|b\|_1.$$

Haciendo el cambio de variable $n = j - k$ obtenemos:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k} b_k| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_n| \sum_{m\in\mathbb{Z}} |b_m| = \|a\|_1 \, \|b\|_1.$$

Por lo tanto, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k} b_k| < +\infty$.

Definición

Definición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces la sucesión $a * b$, llamada la convolución de a y b, se define mediante la siguiente regla:

$$(a * b)_j := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

Una cota superior para la norma de la convolución

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\|a * b\|_1 \leqslant \|a\|_1 \|b\|_1.$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
\|a * b\|_1 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |(a*b)_j| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \Big| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}||b_k| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}||b_k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k| \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|.
\end{aligned}
$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
\|a * b\|_1 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |(a*b)_j| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k\Big| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}||b_k| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}||b_k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k| \sum_{j\in\mathbb{Z}} |a_{j-k}|.
\end{aligned}
$$

Haciendo el cambio de variable $n = j - k$,

$$
\|a * b\|_1 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| = \|b\|_1 \|a\|_1 = \|a\|_1 \|b\|_1.
$$

Por lo tanto se concluye lo deseado.

Plan

Sucesiones básicas

Para cada r en $\mathbb{Z}$, denotemos por e_r la sucesión

$$e_r := \left(\delta_{r,j}\right)_{j\in\mathbb{Z}} = (\ldots,\ 0,\ 0,\ \underbrace{1}_{r},\ 0,\ 0,\ \ldots).$$

Ejemplo:

$$e_2 = (\ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots).$$

En este caso se ha remarcado al elemento de la entrada 0 con el propósito de distinguirlo.

Se hará lo mismo con las sucesiones de los demás ejemplos cuando sea necesario.

Convolución de dos sucesiones básicas

Proposición

Sean $r, s \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$e_r * e_s = e_{r+s}.$$

Convolución de dos sucesiones básicas

Proposición

Sean $r, s \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$e_r * e_s = e_{r+s}.$$

Demostración. Para cada j en $\mathbb{Z}$,

$$(e_r * e_s)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (e_r)_{j-k} (e_s)_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{r,j-k} \delta_{s,k} = \delta_{r,j-s} = \delta_{r+s,j}.$$

Un filtro para promediar

$$a = \frac{1}{3}(e_{-1} + e_0 + e_1) = \left(\ldots,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ \ldots\right).$$

Dada una sucesión x en $\ell^1(\mathbb{Z})$,

$$(x * a)_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{j-k} a_k = x_{j+1} a_{-1} + x_j a_0 + x_{j-1} a_1 = \frac{x_{j+1} + x_j + x_{j-1}}{3}.$$

En otras palabras,

$$x * a = \left(\ldots,\ \frac{x_{-2} + x_{-1} + x_0}{3},\ \frac{x_{-1} + x_0 + x_1}{3},\ \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3},\ \ldots\right).$$

Otro ejemplo

Ahora sea

$$a = e_1 - e_0 = (\ldots,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots).$$

Entonces, para cada x en $\ell^1(\mathbb{Z})$,

$$(x * a)_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{j-k} a_k = x_j a_0 + x_{j-1} a_1 = x_{j-1} - x_j.$$

En otras palabras,

$$x * a = (\ldots,\ x_{-1} - x_0,\ x_0 - x_1,\ x_1 - x_2,\ \ldots).$$

Plan

Propiedad asociativa

Proposición

Sean $a, b, c \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Propiedad asociativa

Proposición

Sean $a, b, c \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Demostración:

Sea $j \in \mathbb{Z}$. Desarrollamos la componente j-ésima del lado izquierdo.

$$((a * b) * c)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a * b)_{j-k} c_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{j-k-m} b_m c_k \right).$$

Ahora consideremos el cambio de variables $n = k + m$, entonces $m = n - k$. Sustituyendo este cambio de variable en la expresión anterior e intercambiando el orden de las sumas, por la convergencia absoluta, nos queda:

$$((a * b) * c)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j-n} b_{n-k} c_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-n} b_{n-k} c_k.$$

Ahora consideremos el cambio de variables $n = k + m$, entonces $m = n - k$. Sustituyendo este cambio de variable en la expresión anterior e intercambiando el orden de las sumas, por la convergencia absoluta, nos queda:

$$((a * b) * c)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j-n} b_{n-k} c_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-n} b_{n-k} c_k.$$

Por otro lado,

$$(a * (b * c))_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} (b * c)_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_{k-n} c_n.$$

Ahora consideremos el cambio de variables $n = k + m$, entonces $m = n - k$. Sustituyendo este cambio de variable en la expresión anterior e intercambiando el orden de las sumas, por la convergencia absoluta, nos queda:

$$((a * b) * c)_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{j-n} b_{n-k} c_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-n} b_{n-k} c_k.$$

Por otro lado,

$$(a * (b * c))_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} (b * c)_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_{k-n} c_n.$$

Como lo anterior es válido para toda $j \in \mathbb{Z}$ por lo tanto se concluye que

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Propiedad conmutativa

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces

$$a * b = b * a.$$

Propiedad conmutativa

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces
$$a * b = b * a.$$

Demostración:

Sea $j \in \mathbb{Z}$ y consideremos el cambio de variable $m = j - k$, entonces $k = j - m$.

Luego:
$$(a * b)_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j-k} b_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k a_{j-k} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_{j-m} a_m = (b * a)_j.$$

Por lo tanto
$$a * b = b * a.$$

El elemento neutro bajo la convolución

Proposición

Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces

$$a * e_0 = a.$$

El elemento neutro bajo la convolución

Proposición

Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces

$$a * e_0 = a.$$

Demostración:

Sea $j \in \mathbb{Z}$, entonces

$$(a * e_0)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} (e_0)_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} \delta_{0,k} = a_j.$$

Por lo tanto se cumple lo deseado.

Ejercicios

Ejercicio (propiedad distributiva de la convolución).
Para cualesquiera a, b, c en $\ell^1(\mathbb{Z})$,

$$(a + b) * c = a * c + b * c.$$

Ejercicio (propiedad homogénea de la convolución).
Para cada a, b en $\ell^1(\mathbb{Z})$ y cada λ en $\mathbb{C}$,

$$(\lambda a) * b = \lambda\, a * b.$$

Ejercicio(trivial).

$$\|e_0\|_1 = 1.$$

Observación

Las propiedades algebraicas demostradas permiten afirmar que $\ell^1(\mathbb{Z})$ con la operación convolución forma un álgebra compleja asociativa, conmutativa y con identidad.

Más aún, por el hecho de que la norma de la convolución de dos elementos de $\ell^1(\mathbb{Z})$ sea acotada y que la norma del elemento neutro e_0 sea 1 (ejercicio anterior), se puede decir que el álgebra anterior es un álgebra de Banach.

El álgebra de Banach $\ell^1(\mathbb{Z})$ se llama el álgebra de convolución.

Plan

Definición de las series de Fourier

Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces definimos $\check{a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\check{a}(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{kix}.$$

Ya sabemos que $\check{a}$ es una función continua y 2π-periódica.

El teorema de convolución

Teorema

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces

$$\widecheck{a * b} = \check{a}\,\check{b},$$

esto es, para cada x en $\mathbb{R}$,

$$\widecheck{a * b}(x) = \check{a}(x)\,\check{b}(x).$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\widetilde{a * b}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a*b)_k e^{kix} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{k-j} b_j e^{kix} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k-j} b_j e^{kix}$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k-j} e^{kix}.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\widecheck{a * b}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a * b)_k e^{kix} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{k-j} b_j e^{kix} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k-j} b_j e^{kix}$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k-j} e^{kix}.$$

Consideremos el cambio de variable $n = k - j$, entonces $k = n + j$.

Sustituyendolo en lo anterior y separando la función exponencial obtenemos:

$$\widecheck{a * b}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{(n+j)ix} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j e^{jix} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{nix} = \check{b}(x)\,\check{a}(x)$$
$$= \check{a}(x)\,\check{b}(x).$$