Marcos de Parseval

Estos apuntes son muy cercanos a un fragmento del libro de Paulsen y Raghupathi “An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces”.

1 Definición. Sea H un espacio de Hilbert, sea S un conjunto (finito o infinito, numerable o no numerable), y sea $(f_s)_{s\in S}$ una familia de vectores en S. Se dice que $(f_s)_{s\in S}$ es un *marco de Parseval* para H si para cada h en H se cumple que

$$\|h\|^2 = \sum_{s\in S} |\langle h, f_s\rangle|^2.$$

2 Observación. Recordemos que $\ell^2(S)$ es un espacio de Hilbert y $(e_s)_{s\in S}$ es una base orthonormal en $\ell^2(S)$. Esto significa que la familia $(e_s)_{s\in S}$ es ortogonal y para cada x en $\ell^2(S)$ se tiene la descomposición

$$x = \sum_{s\in S} x_s e_s,$$

donde la convergencia se cumple en la norma de $\ell^2(S)$.

3 Proposición (criterio de marco de Parseval)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y sea $(f_s)_{s\in S}$ una familia en H. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $(f_s)_{s\in S}$ es un marco de Parseval;

(b) la función $V\colon H \to \ell^2(S)$, definida mediante

$$(Vh)(s) := \langle h, f_s\rangle,$$

está bien definida y es una isometría;

(c) para cada h en H, se tiene que

$$h = \sum_{s\in S} \langle h, f_s\rangle\, f_s.$$

Demostración. (a)⇒(b). Esta implicación se sigue directamente de la definición del marco de Parseval.

(b)⇒(c). Supongamos que la función V está bien definida y es una isometría. Notemos que para cada s en S y cada h en H se tienen las siguientes igualdades:

$$\langle h, V^* e_s\rangle = \langle Vh, e_s\rangle = \langle h, f_s\rangle.$$

Por eso $V^*e_s = f_s$. Además, como V es una isometría lineal, $V^*V = I_H$. Luego para cada h en H

$$h = V^*Vh = V^*\left(\sum_{s\in S}\langle h, f_s\rangle e_s\right) = \sum_{s\in S}\langle h, f_s\rangle f_s.$$

(c)$\Rightarrow$(a). Supongamos que se cumple la condición (c). Entonces para cada h en H

$$\langle h, h\rangle = \left\langle \sum_{s\in S}\langle h, f_s\rangle f_s, h\right\rangle = \sum_{s\in S}\langle h, f_s\rangle\langle f_s, h\rangle = \sum_{s\in S}|\langle h, f_s\rangle|^2. \qquad \square$$

4 Proposición. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $(f_s)_{s\in S}$ un marco de Parseval para H. Entonces para cada g, h en H,*

$$\langle g, h\rangle = \sum_{s\in S}\langle g, f_s\rangle\,\langle f_s, h\rangle.$$

Demostración. Usamos la notación V de la Proposición 3. Como V es una isometría lineal, V preserva el producto interno, y para cada h_1, h_2 en H obtenemos que

$$\begin{aligned}\langle h_1, h_2\rangle = \langle Vh_1, Vh_2\rangle &= \sum_{s\in S}(Vh_1)(s)\overline{(Vh_2)(s)} \\ &= \sum_{s\in S}\langle h_1, f_s\rangle\,\overline{\langle h_2, f_s\rangle} = \sum_{s\in S}\langle h_1, f_s\rangle\langle f_s, h_2\rangle. \qquad \square\end{aligned}$$

Marcos de Parseval se obtienen por medio de bases ortonormales y proyecciones ortogonales

5 Proposición. *Sean L un espacio de Hilbert, H un subespacio serrado de L, P la proyección ortogonal correspondiente y $(b_s)_{s\in S}$ una base ortogonal de L. Entonces*

$$(Pb_s)_{s\in S}$$

es un marco de Parseval para H.

Demostración. Sea $v \in H$. Entonces $v = Pv$ y para cada s en S

$$\langle v, b_s\rangle = \langle Pv, b_s\rangle = \langle v, Pb_s\rangle.$$

Aplicamos la identidad de Parseval:

$$\|v\|^2 = \sum_{s\in S}|\langle v, b_s\rangle|^2 = \sum_{s\in S}|\langle v, Pb_s\rangle|^2. \qquad \square$$

6 Proposición (repaso: la proyección ortogonal asociada a una isometría lineal)**.** *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y sea $V : H_1 \to H_2$ una isometría lineal. Pongamos $P \coloneqq VV^*$. Entonces P es una proyección ortogonal y $P[H_2] = V[H_1]$.*

Demostración. Usado la igualdad $V^*V = I$ es fácil ver que $P^2 = P$. Además, $P^* = P$. Dado h en H_2, tenemos que

$$P(h) = (VV^*)(h) = V(V^*h) \in V[H_1].$$

Por otro lado, dado g en H_1,

$$V(g) = (VV^*V)(g) = P(Vg) \in P[H_2]. \qquad \square$$

7 Proposición (Larsen)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y sea $(f_s)_{s\in S}$ un marco de Parseval en H. Entonces existe un espacio de Hilbert K tal que H se puede identificar con un subespacio cerrado de K, y existe una base ortonormal $(b_s)_{s\in S}$ de K tal que $f_s = Pb_s$ para cada s en S, donde P es la proyección ortogonal de K sobre H.*

Demostración. Sea $V : H \to \ell^2(S)$ la isometría de la Proposición 3. Pongamos $K \coloneqq \ell^2(S)$. Usamos la base canónica $(e_s)_{s\in S}$ como $(b_s)_{s\in S}$. Identificamos H con $V[H]$. Como H es de Hilbert, $V[H]$ también es de Hilbert y por lo tanto es cerrado en $\ell^2(S)$. Pongamos $P \coloneqq VV^*$. Entonces P es una proyección ortogonal y $P[\ell^2(S)] = V[H]$. Además, $Pe_s = VV^*e_s = Vf_s$. $\square$

8 Ejercicio. Sea H un espacio de Hilbert de dimensión finita n y sea $(f_1, \ldots, f_n)$ un marco de Parseval para H. Demostrar que $(f_1, \ldots, f_n)$ es una base ortonormal de H.