El espacio de Paley–Wiener en la recta real y las series cardinales

Estos apuntes están escritos por Iris Paola Lozano Vite y Egor Maximenko, en 2025 y 2026. Egor Maximenko agradece a Daniel Martin Vargas Cabello por estudiar juntos temas muy cercanos (convergencia de series cardinales para $f = \mathcal{F}g$, donde $g \in L^1([-a, a])$).

Nota histórica breve. Las siguientes ideas son conocidas. El teorema principal de estos apuntes (Teorem 34) se conoce como el teorema de muestreo de Whittaker–Shannon (ver [4] y [3]) y también se relaciona con los nombres de Borel, Nyquist y Kotelnikov. Sin embargo, estos autores no explicaron muy bien la convergencia uniforme. Paley y Wiener [2] introdujeron el espacio de las tranformadas de Fourier de $L^2([-a, a])$, tratándolo como un espacio de funciones analíticas enteras. La propiedad reproductora en este espacio (el Teorema 18 de estos apuntes) fue notada después, por ejemplo, en los trabajos de Yao [5] y de Branges [1]. La convergencia uniforme de las series cardinales se entiende de manera muy clara usando el concepto de espacios de Hilbert con núcleos reproductores.

Objetivos. Consideramos el espacio de Hilbert H de todas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continuas y cuadrado integrables, cuya transformada de Fourier se anula casi en todas partes fuera del intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Demostramos que H es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Demostramos que cada función f de la clase H se expande en la serie cardinal:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} f(k)\,\operatorname{sinc}(x-k),$$

donde sinc es la función seno cardinal (normalizada). Más aún, esta serie cardinal converge de manera uniforme en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Prerrequisitos. Espacios de Hilbert con núcleos reproductores (EHNR), transformada de Fourier, identidad de Plancherel, serie cardinal.

1 Ejercicio. En vez del intervalo $[-1/2, 1/2]$, se puede considerar el intervalo $[-a, a]$; en este caso, hay que usar otros nodos y dilatar las funciones sinc. Estas modificaciones se proponen como un ejercicio para los lectores.

Preliminares

2 Repaso (espacios $L^1(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R})$)**.** Consideramos la recta real $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue λ. Usamos la notación $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ para los espacios seminormados de *funciones* Lebesgue integrables y cuadrado integrables, respectivamente. Decimos que dos funciones medibles son *equivalentes*, si son iguales casi en todas partes. Denotamos por $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ al espacio vectorial de las funciones que son cero casi en todas partes. Recordemos que $L^1(\mathbb{R})$ se define como el cociente $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})/\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ y el espacio $L^2(\mathbb{R})$ se define como el cociente $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})/\mathcal{Z}(\mathbb{R})$. Los elementos de $L^1(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R})$ son clases de equivalencia. En lo que sigue, pasamos de manera libre de funciones a sus clases de equivalencia. En estos apuntes, consideramos $L^2(\mathbb{R})$ con el producto interno

$$\langle g, h\rangle_{L^2(\mathbb{R})} := \int_{\mathbb{R}} g\,\overline{h}\,\mathrm{d}\lambda.$$

3 Repaso (transformada de Fourier)**.** Dado un elemento g del espacio $L^1(\mathbb{R})$, denotemos por $\mathcal{F}g$ su transformada de Fourier:

$$(\mathcal{F}g)(x) := \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xt}\,\mathrm{d}t.$$

La transformada $\mathcal{F}$ es lineal e inyectiva: si $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ y $\mathcal{F}g = \mathcal{F}h$, entonces g y h son iguales como elementos de $L^1(\mathbb{R})$. Si $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces se tienen las identidades de Plancherel–Parseval:

$$\|\mathcal{F}g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{1}$$

$$\langle \mathcal{F}g, \mathcal{F}h\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle g, h\rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2}$$

4 Repaso (el intervalo $J = [-1/2, 1/2]$ y el espacio $L^2(J)$)**.** En estos apuntes, denotamos por J al intervalo de longitud 1 con centro en el origen:

$$J := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

El espacio $L^2(J)$ se puede identificar con el espacio de clases de equivalencia de las funciones $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son cuadrado integrables y que se anulan casi en todos puntos afuera de J. Como $\lambda(J) = 1 < +\infty$, por la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$L^2(J) \subseteq L^1(\mathbb{R}).$$

El espacio principal

5 Definición. Denotemos por H al conjunto de todas las funciones continuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que existe g en $L^2(J)$ tal que

$$f(x) = \int_J g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xt}\,\mathrm{d}\lambda(t) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

De manera más concisa,

$$H := \{f \in C(\mathbb{R}) \colon \quad \exists g \in L^2(J) \quad f = \mathcal{F}g\}.$$

Definimos $U \colon L^2(J) \to H$,

$$Ug := \mathcal{F}g.$$

6 Observación. El espacio H se conoce como el espacio de funciones de banda limitada (de ancho 1). Paley y Wiener demostraron que las funciones de la clase H admiten una extensión analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$, y describieron este espacio en términos del crecimiento de estas funciones analíticas enteras. En estos apuntes, no vamos a estudiar ni usar esta descripción.

7 Observación. Si $g \in L^2(J)$ y $f = \mathcal{F}g$, entonces automáticamente $f \in C_0(\mathbb{R})$. Por lo tanto, en la definición de H podemos omitir la condición que f es continua.

8 Observación. Si $f \in H$, entonces existe un *único* elemento g de $L^2(J)$ tal que $f = \mathcal{F}g$.

9 Observación. Si $f \in H$, entonces $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Más aún, si $g \in L^2(J)$ y $f = \mathcal{F}g$, entonces, por la identidad de Plancherel,

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

Siempre tratamos los elementos de H como funciones, no como clases de equivalencia.

10 Definición. Definimos la norma en H como una restricción de la seminorma del espacio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, y el producto interno como una restricción del semiproducto interno en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_H := \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \,\mathrm{d}\lambda,$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle_H := \int_{\mathbb{R}} f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Gracias a la biyección U y la identidad (3), de esta manera efectivamente obtenemos una *norma* y un *producto interno*.

11 Proposición. *U es un isomorfismo isométrico de espacios de Hilbert.*

Demostración. Se sigue de las observaciones anteriores. $\square$

12 Observación (la transformación inversa a U)**.** La transformación inversa de U coincide con su adjunta y se puede calcular como la transformada de Fourier–Plancherel inversa. Supongamos que $f \in H$ y $g \in L^2(J)$ tal que $f = \mathcal{F}g$. Para cada $r > 0$, se define $u_r \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$u_r(t) \coloneqq \int_{[-r,r]} f(x)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,tx}\, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Del teorema de Plancherel se sigue que

$$\lim_{r\to+\infty} \|u_r - g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

En otras palabras,

$$U^{-1}f = \lim_{r\to+\infty} u_r,$$

donde el límite se entiende en la norma del espacio $L^2(\mathbb{R})$. Más aún, por el teorema de Carleson sobre la convergencia c.t.p. de las series y transformadas de Fourier, la convergencia $u_r \to g$ se tiene casi en todos puntos.

H como un espacio de Hilbert con núcleo reproductor

13 Definición. Para cada y en $\mathbb{R}$, definimos $\varphi_y \colon J \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_y(t) \coloneqq \mathrm{e}^{2\pi y\,\mathrm{i}\,t} \qquad (t \in J).$$

También podemos pensar que φ_y está definida en $\mathbb{R}$ y se anula afuera de J. En lo que sigue, tratamos φ_y como un elemento de $L^2(J)$.

14 Definición. Denotamos por sinc la función *seno cardinal* (normalizada):

$$\operatorname{sinc}(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que sinc es una función continua en $\mathbb{R}$. Más aún, sinc se podría considerar como una función entera analítica en $\mathbb{C}$, pero en estos apuntes la condideramos en el dominio $\mathbb{R}$.

15 Definición. Para cada y en $\mathbb{R}$, denotamos por sinc_y la función sinc desplazada con el parámetro de desplazamiento y:

$$\operatorname{sinc}_y(x) \coloneqq \operatorname{sinc}(x - y).$$

16 Proposición. *Para cada y en $\mathbb{R}$, $\operatorname{sinc}_y \in H$ y*

$$U\varphi_y = \mathcal{F}\varphi_y = \operatorname{sinc}_y . \tag{4}$$

Demostración. Para $x \neq y$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\varphi_y)(x) &= \int_J \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,yt}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xt}\;\mathrm{d}\lambda(t) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,(y-x)t}\;\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,(y-x)} - \mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,(y-x)}}{2\pi\,\mathrm{i}\,(y-x)} = \frac{\sin(\pi(y-x))}{\pi(y-x)} = \operatorname{sinc}(y-x) = \operatorname{sinc}(x-y).\end{aligned}$$

Para $x = a$, podemos hacer un cálculo de manera separada o aplicar la continuidad de la función $\mathcal{F}\varphi_a$. □

17 Proposición (la propiedad reproductora en H)**.** *Para cada f en H y cada y en $\mathbb{R}$,*

$$\langle f, \operatorname{sinc}_y\rangle_H = f(y).$$

Demostración. Sea $f \in H$ y sea $y \in \mathbb{R}$. Encontramos g en $L^2(J)$ tal que $f = \mathcal{F}g$. Luego

$$\begin{aligned}\langle f, \operatorname{sinc}_y\rangle_H &= \langle Ug, U\varphi_y\rangle_H = \langle g, \varphi_y\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \int_J g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,yt}\;\mathrm{d}\lambda(t) = (\mathcal{F}g)(y) = f(y).\end{aligned}$$ □

18 Teorema. *H es un EHNR, y su núcleo reproductor es*

$$K(x,y) = \operatorname{sinc}(x-y) = \operatorname{sinc}_y(x) \qquad (x, a \in \mathbb{R}).$$

Demostración. Para cada y en $\mathbb{R}$, por la Proposición 16, $\operatorname{sinc}_y \in H$. La Proposición 17 es la propiedad reproductora. □

19 Proposición (la norma del núcleo asociado a un punto)**.** *Para cada x en $\mathbb{R}$,*

$$\|\operatorname{sinc}_x\|_H = 1.$$

Demostración. Usamos la propiedad reproductora:

$$\|\operatorname{sinc}_x\|_H^2 = \langle \operatorname{sinc}_x, \operatorname{sinc}_c\rangle_H = \operatorname{sinc}_x(x) = 1.$$ □

Sabemos una propiedad general de EHNR: la convergencia en norma implica la convergencia puntual. Para el espacio H, podemos afirmar algo más fuerte: la convergencia en norma en H implica la convergencia uniforme.

20 Repaso. Denotamos por $C_0(\mathbb{R})$ al conjunto de las funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que tienden a 0 en el infinito. Consideramos $C_0(\mathbb{R})$ con la norma-supremo:

$$\|f\|_{C_0(\mathbb{R})} = \|f\|_{\sup} \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Se sabe que $C_0(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach. Más aún, $C_0(\mathbb{R})$ un álgebra C* no unitaria, pero no lo vamos a usar en estos apuntes.

21 Proposición (la norma-supremo se acota por la norma en H)**.** *Para cada f en H, $f \in C_0(\mathbb{R})$ y*

$$\|f\|_{\sup} \le \|f\|_H.$$

Demostración. Se sigue de la propiedad reproductora y de la Proposición 19. En efecto, para cada x en $\mathbb{R}$,

$$|f(x)| = |\langle f, \operatorname{sinc}_x\rangle| \le \|f\|_H \|\operatorname{sinc}_x\|_H = \|f\|_H. \qquad \square$$

22 Proposición. *Si $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en H y f es su límite, entonces $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a f de manera uniforme. En otras palabras, si*

$$\lim_{m\to\infty} \|h_m - f\|_H = 0,$$

entonces

$$\lim_{m\to\infty} \|h_m - f\|_{\sup} = 0.$$

Demostración. Se sigue de la Proposión 21 y del teorema de emparedado:

$$0 \le \|h_m - f\|_H \le \|h_m - f\|_{\sup} \to 0. \qquad \square$$

La base ortonormal canónica $L^2(J)$ y series de Fourier

23 Repaso. Se sabe que la sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(J)$. Verifiquemos la propiedad ortonormal. Si $p, q \in \mathbb{Z}$ y $p \ne q$, entonces

$$\langle \varphi_p, \varphi_q\rangle_{L^2(J)} = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,(p-q)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,(p-q)} - \mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,(p-q)}}{2\pi\,\mathrm{i}\,(p-q)} = 0.$$

Si $p = q$, entonces

$$\langle \varphi_p, \varphi_p \rangle_{L^2(J)} = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \, \mathrm{d}t = 1.$$

La completez (la propiedad total) de la sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una consecuencia del teorema de Weierstrass sobre los polinomios trigonométricos. Esta propiedad también se puede deducir como una consecuencia del teorema de Stone–Weierstrass.

24 Proposición (el coeficiente de Fourier de una función en términos de su transformada de Fourier)**.** *Si* $g \in L^2(J)$, $f = Ug$ *y* $k \in \mathbb{Z}$, *entonces*

$$\langle g, \varphi_k \rangle_{L^2(J)} = f(k).$$

Demostración.

$$\langle g, \varphi_k \rangle = \int_J g \, \overline{\varphi_k} \, \mathrm{d}\lambda = \int_J g(t) \, \mathrm{e}^{-2\pi \, \mathrm{i} \, kt} \, \mathrm{d}\lambda(t) = (\mathcal{F}g)(k) = f(k). \qquad \square$$

25 Definición. Definimos $B \colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(J)$ mediante la regla

$$Bs := \sum_{k=-m}^{m} s_k \varphi_k.$$

26 Observación. Por la teoría general de bases ortonormales, B es un isomorfismo isométrico, y su inverso está dado por

$$B^{-1} g = \Big(\langle g, \varphi_k \rangle \Big)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

En otras palabras, $B^{-1}g$ es la sucesión de los coeficientes de Fourier de g. Si $f = \widetilde{\mathcal{F}} f$, entonces, por la Proposición 24,

$$(B^{-1} g)_k = f(k).$$

27 Proposición. *Si* $g \in L^2(J)$ *y* $f = Ug$, *entonces*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| g - \sum_{k=-m}^{m} f(k) \varphi_k \right\|_{L^2(J)} = 0.$$

Demostración. Este resultado sale de la teoría general de bases ortonormales y de la Proposición 24. Como $g \in L^2(J)$ y $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(J)$, sabemos que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| g - \sum_{k=-m}^{m} \langle g, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_{L^2(J)} = 0.$$

Aplicando la Proposición 24, obtenemos el resultado requerido. $\square$

La base ortonormal canónica en H

28 Proposición. $(\operatorname{sinc}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *es una base ortonormal de* H.

Demostración. Se sigue de las propiedades que hemos notado previamente: $U\colon L^2(J) \to H$ es un isomorfismo isométrico, $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(J)$, $U\varphi_{-k} = \operatorname{sinc}_k$. □

29 Definición. Definimos $G\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to H$,

$$Gs \coloneqq \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \operatorname{sinc}_k,$$

donde la convergencia se entiende en la norma del espacio H. Por la teoría general de bases ortonormales en espacios de Hilbert, G es un isomorfismo isométrico de espacios de Hilbert, y su inverso actúa mediante la siguiente regla:

$$G^{-1}f = \Big(\langle f, \operatorname{sinc}_k\rangle\Big)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

30 Observación. Por la Proposición 17, la fórmula para Gf se simplifica:

$$(G^{-1}f)_k = \langle f, \operatorname{sinc}_k\rangle = f(k).$$

31 Definición (las sumas parciales de la serie cardinal de una función)**.** Para cada f en H y cada m en $\mathbb{N}$, definimos $S_{f,m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$S_{f,m} \coloneqq \sum_{k=-m}^{m} f(k) \operatorname{sinc}_k .$$

De manera más detallada,

$$S_{f,m}(x) = \sum_{k=-m}^{m} f(k) \operatorname{sinc}_k(x).$$

32 Proposición. *Para cada* f *en* H,

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-m}^{m} f(k) \operatorname{sinc}_k \right\|_H = 0. \tag{5}$$

En forma más concisa,

$$\lim_{m\to\infty} \|f - S_{f,m}\|_H = 0. \tag{6}$$

Demostración. Para cada k en $\mathbb{Z}$, por la propiedad reproductora,

$$\langle f, \operatorname{sinc}_k \rangle_H = f(k).$$

Como $(\operatorname{sinc}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en H, la siguiente descomposición se tiene en el sentido de la convergencia en H:

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) \operatorname{sinc}_k .$$

La convergencia de la serie ortogonal se puede entender de varias maneras (por ejemplo, como la convergencia de una red, cuando el conjunto de los índices crece). En particular, se tiene el siguiente límite en H:

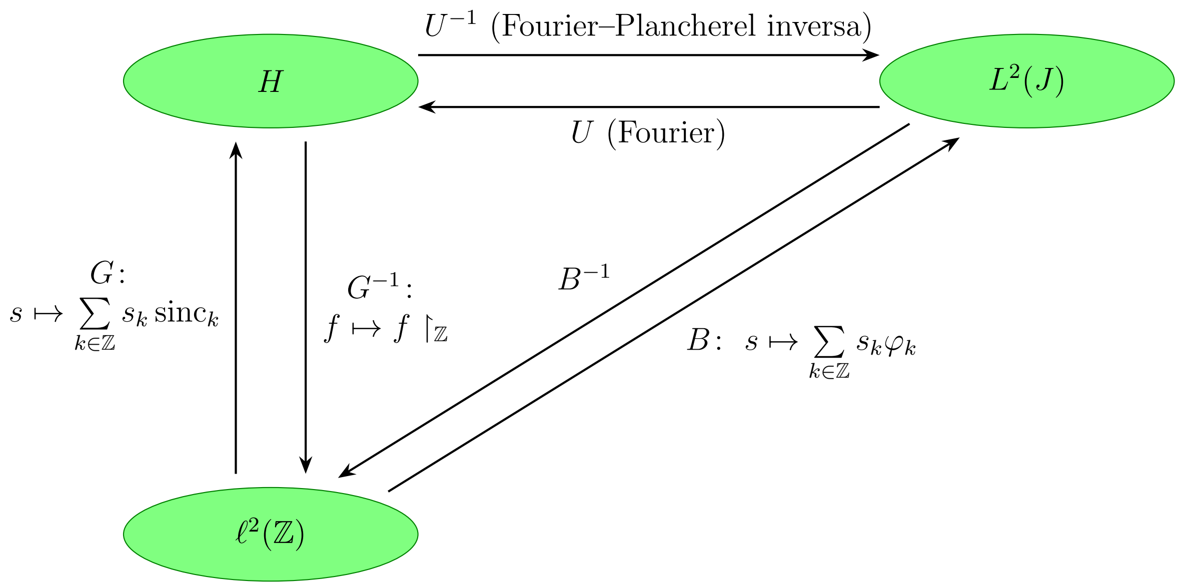
$$f = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} f(k) \operatorname{sinc}_k,$$

y es exactamente el límite (5). □

33 Proposición (la identidad de Parseval para las series cardinales)**.** *Si* $f \in H$, *entonces*

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^2.$$

El siguiente diagrama conmutativo muestra los isomorfismos isométricos naturales entre los espacios H, $L^2(J)$ y $\ell^2(\mathbb{Z})$.



Convergencia uniforme de la serie cardinal

El siguiente teorema es una versión del teorema de muestreo de Whittaker–Shannon.

34 Teorema. *Para cada f en H y cada x en $\mathbb{R}$,*

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} f(k)\operatorname{sinc}(x-k). \tag{7}$$

Más aún, la convergencia es uniforme:

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{k=-m}^{m} f(k)\operatorname{sinc}(x-k) \right| = 0. \tag{8}$$

Demostración. El teorema se sigue fácilmente de las Proposiciones 32 y 22. Daremos una explicación más detallada. Sea $f \in H$. Para cada m en $\mathbb{N}$, definimos $S_{f,m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como la suma parcial

$$S_{f,m} := \sum_{k=-m}^{m} f(k)\operatorname{sinc}_k .$$

En particular, $S_{f,m}$ es un elemento de H, por ser una combinación lineal de las funciones sinc_k. De manera más explícita,

$$S_{f,m}(x) = \sum_{k=-m}^{m} f(k)\operatorname{sinc}(x-k).$$

Por la Proposición 21,

$$\|S_{f,m} - f\|_{\sup} \le \|S_{f,m} - f\|_H .$$

Por la Proposición 32, la última expresión tiende a 0. □

Referencias

[1] de Branges, L. (1968): Hilbert Spaces of Entire Functions, Prentice–Hall, AMS.

[2] Paley, R.E.A.C; Wiener, N. (1934): Fourier Transforms in the Complex Domain. American Mathematical Society, Providence, RI.

[3] Shannon, C.E. (1949): Communication in the presence of noise. Proceedings of the Institute of Radio Engineers. 37 (1): 10–21.
https://doi.org/10.1109/jrproc.1949.232969.

[4] Whittaker, E. T. (1915): On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 35: 181–194. https://doi.org/10.1017/s0370164600017806.

[5] Yao, K. (1967): Applications of reproducing kernel Hilbert spaces – bandlimited signal models. Inf. Control 11, 429–444.
https://doi.org/10.1016/S0019-9958(67)90650-X