La serie de Neumann

En este tema suponemos que X es un espacio de Banach.

Objetivos. Estudiar la serie de Carl Neumann

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k,$$

donde T es un operador lineal acotado en un espacio de Banach tal que $\|T\| < 1$.

Prerrequisitos. Espacios de Banach, el álgebra de los operadores lineales acotados, la continuidad de la operación de multiplicación de operadores, la suma de la progresión geométrica.

Ya sabemos que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach con identidad I. En particular, sabemos que

$$\|ST\| \le \|S\| \, \|T\|$$

para cada S, T en $\mathcal{B}(X)$. Usando esta desigualdad y otras ideas hemos demostrado que la multiplicación en $\mathcal{B}(X)$ es una operación continua.

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama *invertible* si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$. Denotamos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{B}(X)$:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \coloneqq \big\{ S \in \mathcal{B}(X) \colon \quad \exists T \in \mathcal{B}(X) \quad ST = I \quad \wedge \quad TS = I \big\}.$$

El siguiente resultado es la fórmula para la suma de la progresión geométrica, pero en el contexto de los operadores lineales acotados.

1 Proposición (sobre la serie de Carl Neumann)**.** *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| < 1$. Entonces $I - T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$,*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k,$$

Más aún,

$$\|(I - T)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|T\|}, \qquad \|(I - T)^{-1} - I\| \le \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}.$$

Demostración. Para cada m en $\mathbb{N}$, definimos S_m como

$$S_m \coloneqq \sum_{k=0}^{m} T^k.$$

La condición $\|T\| < 1$ implica que $\|T^k\| \le \|T\|^k$, y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| < +\infty.$$

Como el espacio normado $\mathcal{B}(X)$ es completo, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge. Denotemos su suma por U:

$$U \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \lim_{m\to\infty} S_m.$$

Entonces

$$\|U\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Notamos que

$$(I - T)S_m = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1} = I - T^{m+1}.$$

De manera similar,

$$S_m(I - T) = \sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^{k+1} = I - T^{m+1}.$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$. La multiplicación en $\mathcal{B}(X)$ es una función continua, por eso $(I - T)S_m \to (I - T)U$. Por otro lado, $T^{m+1} \to 0_{\mathcal{B}(X)}$. Concluimos que

$$(I - T)U = I, \qquad U(I - T) = I.$$

Ejercicio: demostrar que $\|U - I\| \le \frac{\|T\|}{1-\|T\|}$. □