Teorema de Moore–Aronszajn

Egor Maximenko: agradezco a Alexis Pantoja Pineda por los estudios conjuntos de esta demostración.

Objetivos. Demostrar el teorema de Moore–Aronszajn trabajando con sucesiones de Cauchy que convergen de manera puntual y sin usar la completación abstracta de espacios con producto interno.

Prerrequisitos. Núcleos, sucesiones de Cauchy, la desigualdad de Schwarz para semi-productos internos.

Recordemos: una función $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ se llama *núcleo* o función *definida positiva* (en el sentido no estricto), si para cada m, cualesquiera $x_1, \ldots, x_m$ en X y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en $\mathbb{C}$,

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\lambda_r}\, \lambda_s\, K(x_r, x_s) \geq 0.$$

Identificamos la función K de clase $\mathbb{C}^{X^2}$ con la familia de funciones $(K_x)_{x\in X}$ de clase $\mathbb{C}^X$, poniendo

$$K_x(y) \coloneqq K(y, x).$$

Ya sabemos que los núcleos tienen la propiedad hermítica (en el caso real hay que pedir la propiedad simétrica en la definición):

$$K_y(x) = \overline{K_x(y)}. \tag{1}$$

Además, para los núcleos se cumple el siguiente análogo de la desigualdad de Schwarz:

$$|K_x(y)|^2 \leq K_x(x) K_y(y). \tag{2}$$

Consideramos el conjunto de funciones $\mathbb{C}^X$ como espacio vectorial complejo, con operaciones naturales (punto a punto).

1 Teorema (Moore–Aronszajn)**.** *Sea X un conjunto y sea $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ un núcleo. Entonces existe un único espacio de Hilbert H tal que H es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^X$ y K es un núcleo reproductor de H.*

Ya hemos demostrado la unicidad del espacio H en las clases anteriores.

También sabemos que si un espacio con producto interno tiene núcleo reproductor, entonces el núcleo reproductor es único.

En el resto de esta sección supongamos que se cumplen las suposiciones del Teorema 1. Vamos a usar la notación $V \le \mathbb{C}^X$, cuando V es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^X$.

Denotamos por H_0 al conjunto de las combinaciones lineales (finitas, por supuesto) de las funciones K_x, con x en X:

$$H_0 \coloneqq \ell\left(\left\{K_x\colon\ x \in X\right\}\right).$$

En otras palabras, H_0 es el subespacio vectorial de $\mathbb{C}^X$, generado por $\left\{K_x\colon\ x \in X\right\}$.

Vamos a explicar de manera muy detallada una demostración del Teorema 1, basada en los trabajos de Moore y Aronszajn. La dividimos en las siguientes partes principales:

- en el conjunto H_0 definimos un producto interno tal que K sea el núcleo reproductor de H_0;
- demostramos el lema principal sobre la convergencia a 0 en H_0;
- construimos H tal que H es un subconjunto de $\mathbb{C}^X$ y al mismo tiempo es una completación de H_0;
- mostramos que K es el núcleo reproductor de H.

2 Lema (preparación para definir el producto interno en H_0)**.** *Sean $f, g \in H_0$. Supongamos que*

$$f = \sum_{r=1}^{m} \alpha_r K_{x_r} = \sum_{r=1}^{n} \beta_r K_{y_r}, \qquad g = \sum_{s=1}^{p} \xi_s K_{z_s} = \sum_{s=1}^{q} \eta_s K_{w_s},$$

donde $m, n, p, q \in \mathbb{N}_0$, $x_r, y_r, z_s, w_s \in X$, $\alpha_r, \beta_r, \xi_s, \eta_s \in \mathbb{C}$ para cada r y s. Entonces

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{p} \alpha_r \overline{\xi_s} K_{x_r}(z_s) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{q} \beta_r \overline{\eta_s} K_{y_r}(w_s).$$

Demostración. Usamos propiedades de sumas finitas y la definición de las operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$:

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{p} \alpha_r \overline{\xi_s} K_{x_r}(z_s) = \sum_{s=1}^{p} \overline{\xi_s}\left(\sum_{r=1}^{m} \alpha_r K_{x_r}(z_s)\right) = \sum_{s=1}^{p} \overline{\xi_s} f(z_s).$$

De manera similar,

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{p}\beta_r\overline{\xi_s}K_{y_r}(z_s) = \sum_{s=1}^{p}\overline{\xi_s}\left(\sum_{r=1}^{n}\beta_r K_{y_r}(z_s)\right) = \sum_{s=1}^{p}\overline{\xi_s}f(z_s).$$

Por otro lado, como la función K es hermítica (es decir, conjugadamente simétrica),

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{p}\beta_r\overline{\xi_s}K_{y_r}(z_s) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{p}\beta_r\overline{\xi_s}\overline{K_{z_s}(y_r)} = \sum_{r=1}^{n}\beta_r\overline{\left(\sum_{s=1}^{p}\xi_s K_{z_s}(y_r)\right)} = \sum_{r=1}^{n}\beta_r\overline{g(y_r)}.$$

De manera similar,

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{q}\beta_r\overline{\eta_s}K_{y_r}(w_s) = \sum_{r=1}^{n}\beta_r\overline{\left(\sum_{s=1}^{q}\eta_s K_{w_s}(y_r)\right)} = \sum_{r=1}^{n}\beta_r\overline{g(y_r)}.$$

Combinamos los resultados anteriores y obtenemos

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{p}\alpha_r\overline{\xi_s}K_{x_r}(z_s) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{p}\beta_r\overline{\xi_s}K_{y_r}(z_s) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{q}\beta_r\overline{\eta_s}K_{y_r}(w_s). \qquad \square$$

3 Definición. Definimos $\varphi\colon H_0^2 \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla. Dadas f, g en H_0, encontramos $m, p \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \xi_1, \ldots, \xi_p \in \mathbb{C}$, $x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_p \in X$ tales que

$$f = \sum_{r=1}^{m}\alpha_r K_{x_r}, \qquad g = \sum_{s=1}^{p}\xi_s K_{z_s},$$

y ponemos

$$\varphi(f, g) := \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{p}\alpha_r\overline{\xi_s}K_{x_r}(z_s).$$

Como f y g pueden tener varias descomposiciones lineales, la definición requiere una justificación, y el Lema 2 nos da esta justificación.

4 Proposición. *La función φ es un producto interno en H_0. Más aún, para cada f en H_0 y cada y en X,*

$$f(y) = \varphi(f, K_y). \tag{3}$$

Demostración. De la definición de la adición en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y de la definición de φ se sigue fácilmente que la propiedad aditiva respecto a cada uno de los argumentos: se trata de juntar las combinaciones lineales correspondientes.

Usando la definición de operaciones en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la definición de φ y la propiedad distributiva para las sumas finitas, es fácil demostrar que la función φ es homogénea respecto al primer argumento y conjugadamente homogénea respecto al segundo.

La propiedad hermítica de K implica fácilmente que la función φ es conjugadamente simétrica.

Sea f de la forma $\sum_{r=1}^{m} \alpha_r K_{x_r}$. Entonces, por la definición de φ,

$$\varphi(f, f) = \sum_{r,s=1}^{m} \alpha_r \overline{\alpha_s} K_{x_r}(x_s).$$

Por la definición del núcleo, esta expresión es ≥ 0.

Hemos mostrado que φ es un semi-producto interno.

Mostremos (3). Si f es de la forma $\sum_{r=1}^{m} \alpha_r K_{x_r}$, entonces aplicamos la definición de $\varphi(f, g)$ con $g = 1\, K_y$ y obtenemos

$$f(y) = \sum_{r=1}^{m} \alpha_r K_{x_r}(y) = \varphi(f, g) = \varphi(f, K_y).$$

Finalmente, supongamos que $f \in H_0$ y $\varphi(f, f) = 0$. Luego, por la desigualdad de Schwarz para los semi-productos internos, para cada y en X se cumple

$$|f(y)|^2 = |\varphi(f, K_y)|^2 \leq \varphi(f, f)\varphi(K_y, K_y) = 0.$$

Esto significa que f es la función constante cero. $\square$

5 Observación. En particular, aplicando la definición de $\varphi(f, g)$ con $f = K_a$, $g = K_b$, obtenemos

$$\forall a, b \in X \qquad \varphi(K_a, K_b) = K_a(b). \tag{4}$$

6 Corolario. *En el espacio vectorial H_0 existe un único producto interno φ tal que se cumple (4).*

Denotamos por $\|\cdot\|_{H_0}$ la norma en H_0 inducida por φ.

Denotemos por $\mathcal{C}(H_0)$ al conjunto de las sucesiones de Cauchy en H_0.

El siguiente resultado es la herramienta principal para construir una completación de H_0, trabajando dentro de $\mathbb{C}^X$ y evitando clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy.

7 Lema (sobre las sucesiones de Cauchy en H_0 que convergen de manera puntual a la función constante cero)**.** *Sea $u = (u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(H_0)$ tal que*

$$\forall x \in X \qquad \lim_{j\to\infty} u_j(x) = 0.$$

Entonces $\|u_j\|_{H_0} \to 0$, cuando $j \to \infty$.

Demostración. Como u es una sucesión de Cauchy, u es acotada. Sea $C_1 > 0$ tal que $\|u_j\|_{H_0} \le C_1$ para cada j.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de la sucesión de Cauchy, existe n en $\mathbb{N}$ tal que para cada $j, k \ge n$ se tiene $\|u_j - u_k\|_{H_0} < \varepsilon/(2C)$. Como $u_n \in H_0$, encontramos m en $\mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m$ en X, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ en $\mathbb{C}$, tales que

$$u_n = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s K_{x_s}.$$

Por la suposición, para cada s en $\{1, \ldots, m\}$ tenemos

$$\lim_{j\to\infty} u_j(x_s) = 0.$$

Encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que $p \ge n$ y para cada $j \ge p$

$$\sum_{s=1}^{m} |\alpha_s|\,|u_j(x_s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces para $j \ge p$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\|u_j\|_{H_0}^2 &= |\varphi(u_j, u_j)| = |\varphi(u_j, u_j - u_n + u_n)| \le |\varphi(u_j, u_j - u_n)| + |\varphi(u_j, u_n)| \\
&\le \|u_j\|_{H_0}\,\|u_j - u_n\|_{H_0} + \sum_{s=1}^{m} |\alpha_s|\,|\varphi(u_j, K_{x_s})| \\
&\le C\,\frac{\varepsilon}{2C} + \sum_{s=1}^{m} |\alpha_s|\,|u_j(x_s)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

El resto de este texto todavía no tiene demostraciones

8 Definición (la construcción de H)**.**

$$H \coloneqq \Big\{ f \in \mathbb{C}^X :\ \exists g = (g_j)_{j\in\mathbb{N}} \in H_0^{\mathbb{N}} \quad \big(g \text{ es de Cauchy}\big) \ \wedge\ \big(\forall x \in X\ g_j(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\big) \Big\}.$$

9 Lema (preparación para construir el producto interno en H)**.** *Sean f, g en H y sean $u, v \in \mathcal{C}(H_0)$ tales que $u \to f$ y $v \to g$ de manera puntual. Entonces la sucesión*

$$\big(\varphi(u_j, v_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$$

es de Cauchy en $\mathbb{C}$ y por lo tanto tiene un límite.

10 Lema (preparación para construir el producto interno en H)**.** *Sean f, g en H y sean $u, v, w, z \in \mathcal{C}(H_0)$ tales que $u \to f$, $w \to f$, $v \to g$ y $z \to g$ de manera puntual. Entonces*

$$\lim_{j\to\infty} \varphi(u_j, v_j) = \lim_{j\to\infty} \varphi(w_j, z_j).$$

11 Definición. Sean f, g en H. Elegimos $u, v \in \mathcal{C}(H_0)$ tales que $u \to f$ y $v \to g$ de manera puntual. Pongamos

$$\langle f, g\rangle = \lim_{j\to\infty} \varphi(u_j, v_j).$$

Los lemas anteriores justifican que esta definición es consistente.

12 Proposición. *H es un espacio con producto interno.*

13 Proposición. *H es un espacio de Hilbert.*

14 Proposición. *La familia $(K_x)_{x\in X}$ es un núcleo reproductor de H.*