Desigualdad de Minkowski

(un tema de la unidad "Espacios L^p")

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

14 de octubre de 2022

1. Introducción
2. Desigualdad de Minkowski
3. Criterio de igualdad en la desigualdad de Minkowski

Plan

1. Introducción
2. Desigualdad de Minkowski
3. Criterio de igualdad en la desigualdad de Minkowski

Objetivo: demostrar la desigualdad de Minkowski, esto es, la propiedad subaditiva de la función

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p},$$

donde $1 \leq p < +\infty$.

Prerrequisitos:

- desigualdad de Hölder,
- propiedades de la integral de Lebesgue.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Funciones medibles

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ o brevemente $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$: funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ es un espacio vectorial complejo respecto a las operaciones punto a punto:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x).$$

El vector cero de este espacio es la función constante cero 0_X.

La seminorma extendida N_p, $1 \le p < +\infty$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

También se define $N_p(f)$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

La seminorma extendida N_p, $1 \le p < +\infty$

Sea $p \in [1, +\infty)$. Definimos $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

También se define $N_p(f)$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Ejercicio. Demostrar que N_p es absolutamente homogénea:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \forall f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \qquad N_p(\lambda f) = |\lambda| \, N_p(f).$$

Repaso: la desigualdad de Hölder

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g).$$

Un truco con las potencias complementarias

Lema

Sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_q(h^{p-1}) = N_p(h)^{p/q}.$$

Demostración:

$N_q(h^{p-1})$

Un truco con las potencias complementarias

Lema

Sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_q(h^{p-1}) = N_p(h)^{p/q}.$$

Demostración:

$$N_q(h^{p-1}) =$$

Un truco con las potencias complementarias

Lema

Sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_q(h^{p-1}) = N_p(h)^{p/q}.$$

Demostración:

$$N_q(h^{p-1}) = \left(\int_X h^{q(p-1)} \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/q}$$

Un truco con las potencias complementarias

Lema

Sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_q(h^{p-1}) = N_p(h)^{p/q}.$$

Demostración:

$$N_q(h^{p-1}) = \left(\int_X h^{q(p-1)} \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/q} =$$

Un truco con las potencias complementarias

Lema

Sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_q(h^{p-1}) = N_p(h)^{p/q}.$$

Demostración:

$$N_q(h^{p-1}) = \left(\int_X h^{q(p-1)} \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/q} = \left(\int_X h^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/q}$$

Un truco con las potencias complementarias

Lema

Sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_q(h^{p-1}) = N_p(h)^{p/q}.$$

Demostración:

$$N_q(h^{p-1}) = \left(\int_X h^{q(p-1)} \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/q} = \left(\int_X h^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/q} =$$

Un truco con las potencias complementarias

Lema

Sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_q(h^{p-1}) = N_p(h)^{p/q}.$$

Demostración:

$$N_q(h^{p-1}) = \left(\int_X h^{q(p-1)}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = \left(\int_X h^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = \left(\left(\int_X h^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\right)^{p/q}$$

Un truco con las potencias complementarias

Lema

Sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_q(h^{p-1}) = N_p(h)^{p/q}.$$

Demostración:

$$N_q(h^{p-1}) = \left(\int_X h^{q(p-1)}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = \left(\int_X h^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = \left(\left(\int_X h^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\right)^{p/q} =$$

Un truco con las potencias complementarias

Lema

Sea $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_q(h^{p-1}) = N_p(h)^{p/q}.$$

Demostración:

$$N_q(h^{p-1}) = \left(\int_X h^{q(p-1)}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = \left(\int_X h^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = \left(\left(\int_X h^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\right)^{p/q} = N_p(h)^{p/q}.$$

Plan

1 Introducción

2 Desigualdad de Minkowski

3 Criterio de igualdad en la desigualdad de Minkowski

Una desigualdad para $(a+b)^p$

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $1 \leq p < +\infty$. Entonces

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Una desigualdad para $(a+b)^p$

Proposición

Sean $a, b \geq 0$, $1 \leq p < +\infty$. Entonces

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}\big(a^p + b^p\big).$$

Ejercicio. Demostrar esta propiedad usando la convexidad de la función

$$f_p(x) := x^p.$$

Una cota simple para $N_p(f+g)^p$

Lema

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, y sea $p \in [1, +\infty)$.

Entonces

$$N_p^p(f+g) \leq 2^{p-1}\big(N_p^p(f) + N_p^p(g)\big).$$

En particular, si $N_p(f) < +\infty$ y $N_q(g) < +\infty$. entonces $N_p(f+g) < +\infty$.

Demostración

Para cada x en X, por la desigualdad del triángulo,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p.$$

Demostración

Para cada x en X, por la desigualdad del triángulo,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p.$$

Aplicamos la desigualdad $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$:

$$|f(x) + g(x)|^p$$

Demostración

Para cada x en X, por la desigualdad del triángulo,

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p.$$

Aplicamos la desigualdad $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$:

$$|f(x)+g(x)|^p \leq$$

Demostración

Para cada x en X, por la desigualdad del triángulo,

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p.$$

Aplicamos la desigualdad $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$:

$$|f(x)+g(x)|^p \leq 2^{p-1}\left(|f(x)|^p+|g(x)|^p\right).$$

Demostración

Para cada x en X, por la desigualdad del triángulo,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p.$$

Aplicamos la desigualdad $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$:

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Integramos ambos lados:

Demostración

Para cada x en X, por la desigualdad del triángulo,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p.$$

Aplicamos la desigualdad $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$:

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

Integramos ambos lados:

$$N_p^p(f+g)$$

Demostración

Para cada x en X, por la desigualdad del triángulo,

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p.$$

Aplicamos la desigualdad $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$:

$$|f(x)+g(x)|^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p+|g(x)|^p).$$

Integramos ambos lados:

$$N_p^p(f+g) \leq$$

Demostración

Para cada x en X, por la desigualdad del triángulo,

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p.$$

Aplicamos la desigualdad $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$:

$$|f(x)+g(x)|^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p+|g(x)|^p).$$

Integramos ambos lados:

$$N_p^p(f+g) \leq 2^{p-1}(N_p^p(f)+N_p^p(g)).$$

Desigualdad de Minkowski para funciones medibles

Teorema

Sean $p \in [1, +\infty)$, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Entonces

$$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Caso $N_p(f) = +\infty$ o $N_p(g) = +\infty$:

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Caso $N_p(f) = +\infty$ o $N_p(g) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Caso $N_p(f) = +\infty$ o $N_p(g) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Caso $N_p(f+g) = 0$:

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Caso $N_p(f) = +\infty$ o $N_p(g) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Caso $N_p(f+g) = 0$: el lado izquierdo es cero.

Desigualdad de Minkowski, casos triviales

Por demostrar:

$$N_p(f+g) \le N_p(f) + N_p(g).$$

Caso $N_p(f) = +\infty$ o $N_p(g) = +\infty$: En este caso el lado derecho es $+\infty$.

Caso $N_p(f+g) = 0$: el lado izquierdo es cero.

Caso $p = 1$: para cada x en X tenemos

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|.$$

Al integrar, obtenemos el resultado.

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$N_p^p(f+g) =$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q \coloneqq \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$N_p^p(f+g) = \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu =$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$N_p^p(f+g) = \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$\begin{aligned} N_p^p(f+g) &= \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \int_X |f||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$
\begin{aligned}
N_p^p(f+g) &= \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |f||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu \\
\text{(Hölder)} \quad &\le
\end{aligned}
$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$\begin{aligned}
N_p^p(f+g) &= \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |f||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu \\
\text{(Hölder)} \qquad &\le N_p(f) N_p^{p/q}(f+g) + N_p(g) N_p^{p/q}(f+g).
\end{aligned}$$

Desigualdad de Minkowski, el razonamiento principal

Suponemos $1 < p < +\infty$, $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$, $0 < N_p(f+g) < +\infty$.

Definimos $q := \frac{p}{p-1}$, así que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p - 1 = \frac{p}{q}$, $p - \frac{p}{q} = 1$.

$$\begin{aligned} N_p^p(f+g) &= \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f+g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \int_X |f||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p/q} \,\mathrm{d}\mu \\ \text{(Hölder)} \qquad &\le N_p(f) N_p^{p/q}(f+g) + N_p(g) N_p^{p/q}(f+g). \end{aligned}$$

Dividimos entre $N_p^{p/q}(f+g)$ y usamos el hecho que $p - \frac{p}{q} = 1$.

Plan

1. Introducción
2. Desigualdad de Minkowski
3. Criterio de igualdad en la desigualdad de Minkowski

Criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $N_p(f) < +\infty$, $N_q(g) < +\infty$.
Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes.

(a) $N_1(f\,g) = N_p(f) N_q(g)$.

(b) $\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \left(\alpha |f|^p \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} \beta |g|^q\right)$.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Minkowski

Proposición

Sean $p \in [1, +\infty)$, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tales que $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$.

Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $N_p(f+g) = N_p(f) + N_p(g)$;

(b) $\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \left(\alpha f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} \beta g\right)$.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Minkowski

Proposición

Sean $p \in [1, +\infty)$, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tales que $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$.

Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $N_p(f + g) = N_p(f) + N_p(g)$;

(b) $\exists \alpha, \beta \geq 0 \qquad (\alpha + \beta > 0) \quad \wedge \quad \left(\alpha f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} \beta g\right)$.

Ejercicio: demostrar la proposición.

Sugerencias para demostrar (a)⇒(b), inicio

En la demostración de la desigualdad de Minkowski vimos que

$$\begin{aligned} N_1(|f+g|^p) &\le N_1(|f|\,|f+g|^{p/q}) + N_1(|g|\,|f+g|^{p/q}) \\ &\le N_p(f)N_q(|f+g|^{p/q}) + N_p(g)N_q(|f+g|^{p/q}). \end{aligned}$$

Sugerencias para demostrar (a)⇒(b), inicio

En la demostración de la desigualdad de Minkowski vimos que

$$\begin{aligned} N_1(|f+g|^p) &\le N_1(|f|\,|f+g|^{p/q}) + N_1(|g|\,|f+g|^{p/q}) \\ &\le N_p(f)N_q(|f+g|^{p/q}) + N_p(g)N_q(|f+g|^{p/q}). \end{aligned}$$

Mostrar que si

- $N_1(|f+g|^p) < N_1(|f|\,|f+g|^{p/q}) + N_1(|g|\,|f+g|^{p/q})$, o
- $N_1(|f|\,|f+g|^{p/q}) < N_p(f)N_q(|f+g|^{p/q})$, o
- $N_1(|g|\,|f+g|^{p/q}) < N_p(f)N_q(|f+g|^{p/q})$,

entonces $N_p(f+g) < N_p(f) + N_p(g)$.

Sugerencias para demostrar (a)⇒(b), final

Supongamos que

- $\displaystyle\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X (|f|+|g|)\,|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu$ y
- $N_1(|f|\,|f+g|^{p/q}) = N_p(f)N_q(|f+g|^{p/q})$, y
- $N_1(|g|\,|f+g|^{p/q}) = N_p(f)N_q(|f+g|^{p/q})$,

Demostrar que se deben cumplir algunas igualdades de funciones casi en todas partes.