Desigualdad de Minkowski para sucesiones

Objetivos. Demostrar la desigualdad de Minkowski.

Aplicaciones. La propiedad subaditiva de la norma en $\ell^p(\mathbb{N})$.

Prerrequisitos. La desigualdad de Hölder para sucesiones.

1 Repaso (exponentes conjugados)**.** Dos números $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se llaman *exponentes conjugados.* Tal vez otro nombre adecuado sería *exponentes complementarios.* Es fácil ver que la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se puede escribir también en la siguiente forma equivalente:

$$(p-1)q = p. \tag{1}$$

2 Repaso (la desigualdad de Hölder para sucesiones complejas)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,|b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right)^{1/q}. \tag{2}$$

3 Lema. *Sea $p \in [1, +\infty)$ y sean $\alpha, \beta \ge 0$. Entonces*

$$(\alpha+\beta)^p \le 2^{p-1}(\alpha^p + \beta^p).$$

Demostración. Definimos $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) := 2^{p-1}(1 + t^p) - (1+t)^p.$$

Entonces $f(1) = 2^p - 2^p = 0$ y para cada $t \ge 1$

$$f'(t) = 2^{p-1}pt^{p-1} - p(1+t)^{p-1} = p\big((2t)^{p-1} - (1+t)^{p-1}\big) \ge 0.$$

Por lo tanto, $f(t) \ge f(0) = 0$ para cada $t \ge 1$. Esto significa que

$$(1+t)^p \le 2^{p-1}(1+t^p) \qquad (t \ge 1). \tag{3}$$

Consideremos el caso $\alpha \le \beta$ (el caso $\alpha \ge \beta$ se considera de manera similar). Pongamos $t = \beta/\alpha$ y aplicamos (3):

$$(\alpha+\beta)^p = \alpha^p(1+t)^p \le \alpha^p 2^{p-1}(1+t^p) = 2^{p-1}(\alpha^p + \beta^p). \qquad \square$$

4 Teorema (desigualdad de Minkowski para sucesiones complejas)**.** *Sea* $p \in [1, +\infty)$ *y sean* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*. Entonces*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right)^{1/p}. \tag{4}$$

Demostración. Pongamos

$$A := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p}, \qquad B := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right)^{1/p}, \qquad C := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p}.$$

En el caso $p = 1$ la demostración es muy simple:

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = A + B.$$

Sea $p > 1$. Si $A = +\infty$ o $B = +\infty$, entonces la desigualdad se cumple. Supongamos que $A < +\infty$ y $B < +\infty$. Usando el Lema 3 obtenemos

$$C^p \le \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)^p \le 2^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right) = 2^{p-1}(A^p + B^p) < +\infty,$$

asi que $C < +\infty$. Si $c = 0$, entonces la desigualdad (4) se cumple de manera trivial. Supongamos que $C > 0$. Escribimos $|a_k + b_k|^p$ en la siguiente forma:

$$|a_k + b_k|^p = |a_k + b_k|\, |a_k + b_k|^{p-1} \le |a_k|\, |a_k + b_k|^{p-1} + |b_k|\, |a_k + b_k|^{p-1}.$$

Luego sumamos ambos lados sobre k y aplicamos la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} C^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p &\le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\, |a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\, |a_k + b_k|^{p-1} \\ &\le \big(A + B\big) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q} = (A + B) C^{p/q}. \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado la fórmula $q(p-1) = p$. Dividimos ambos lados entre $C^{p/q}$, y notamos que $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ y obtenemos $C \le A + B$. □

5 Ejercicio (criterio de la igualdad en la desigualdad de Minkowski)**.** Sea $p \in [1, +\infty)$ y sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < +\infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p < +\infty$. Demuestre que la desigualdad (4) se convierte en una igualdad si, y solo si, las sucesiones a y b son *codirigidas*, esto es, a es la sucesión nula o existe $\gamma \ge 0$ tal que $b = \gamma a$. Sugerencia: usar el criterio de la igualdad en la desigualdad de Hölder.