Desigualdad de Minkowski

Objetivos. Demostrar la desigualdad Minkowski usando la desigualdad de Hölder.

Requisitos. Desigualdad de Hölder, la integral de Lebesgue, la propiedad monótona de la integral de Lebesgue.

Aplicaciones. Justificar la definición de los espacios L^p.

Repaso de herramientas auxiliares

1 Repaso (exponentes conjugados)**.** Dos números $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se llaman *exponentes conjugados*. Tal vez otro nombre adecuado sería *exponentes complementarios*. Es fácil ver que la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se puede escribir también en la siguiente forma equivalente:

$$(p-1)q = p. \tag{1}$$

2 Repaso (la función N_p)**.** Sea $p \geq 1$. Se define $N_p \colon \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \to [0, +\infty]$,

$$N_p(f) \coloneqq \left(\int\limits_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

3 Repaso (desigualdad de Hölder para funciones reales o complejas)**.** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$N_1(f\,g) \leq N_p(f) N_q(g), \tag{2}$$

esto es,

$$\int\limits_X |f|\,|g| \, \mathrm{d}\mu \leq \left(\int\limits_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \left(\int\limits_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/q}.$$

4 Proposición (desigualdad para la p-ésima potencia de la suma)**.** *Sean* $p \in [1, +\infty)$, $a, b \geq 0$. *Entonces*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{3}$$

Demostración. Consideramos $\varphi \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$$\varphi(t) \coloneqq t^p.$$

Como $\varphi''(t) = p(p-1)t^{p-2} \geq 0$, la funcion φ es convexa. Luego

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^p \leq \frac{a^p}{2} + \frac{b^p}{2}.$$

Al multiplicar ambos lados por 2^p, obtenemos (3). $\square$

Desigualdad de Minkowski

5 Lema. *Sea* $(X,\mathcal{F},\mu)$ *un espacio de medida, sean* $f,g\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})$, *y sea* $p\in[1,+\infty)$. *Supongamos que* $N_p(f)<+\infty$ *y* $N_q(g)<+\infty$. *Entonces* $N_p(f+g)<+\infty$.

Primera demostración. Para cada x en X aplicamos la desigualdad del triángulo y la desigualdad (3):

$$|f(x)+g(x)|^p \le (|f(x)|+|g(x)|)^p \le 2^{p-1}(|f(x)|+|g(x)|)^p.$$

Integramos sobre X respecto la medida μ. Obtenemso

$$\begin{aligned} N_p(f+g)^p &= \int\limits_X |f+g|^p\,\mathrm{d}\mu \le 2^{p-1}\left(\int\limits_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X |g|^p\,\mathrm{d}\mu\right) \\ &= 2^{p-1}\big(N_p(f)^p + N_q(g)^q\big) < +\infty. \end{aligned}$$

□

Segunda demostración. Sea

$$Y \coloneqq \{x\in X\colon\ |f(x)|\ge|g(x)|\}.$$

Para cada x en Y acotamos $|f(x)+g(x)|$ por $2|f(x)|$:

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)|+|g(x)| \le 2|f(x)|.$$

Para cada x en $X\setminus Y$ acotamos $|f(x)+g(x)|$ por $2|g(x)|$:

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)|+|g(x)| \le 2|g(x)|.$$

Luego

$$\begin{aligned} N_p(f+g)^p &= \int\limits_X |f+g|^p\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_Y |f+g|^p\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{X\setminus Y} |f+g|^p\,\mathrm{d}\mu \\ &\le 2^p \int\limits_Y |f|^p\,\mathrm{d}\mu + 2^p \int\limits_{X\setminus Y} |g|^p\,\mathrm{d}\mu \le 2^p(N_p(f)^p+N_q(g)^p) < +\infty. \end{aligned}$$

□

6 Lema. *Sea* $h\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty))$ *y sean* $p,q>1$ *tales que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Entonces*

$$N_q(h^{p-1}) = N_p(h)^{p/q}$$

Demostración.

$$\left(\int\limits_X h^{q(p-1)}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = \left(\int\limits_X h^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} = \left(\left(\int\limits_X h^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\right)^{p/q}.$$

□

7 Teorema (desigualdad de Minkowski)**.** *Sean* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida,* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ *y* $p \in [1, +\infty)$*. Entonces*

$$N_p(f+g) \le N_p(f) + N_p(g), \tag{4}$$

esto es,

$$\left(\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Demostración. En el caso $p = 1$ la demostración es muy simple:

$$N_1(f+g) = \int_X |f+g| \,\mathrm{d}\mu \le \int_X (|f| + |g|) \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \,\mathrm{d}\mu = N_1(f) + N_1(g).$$

Sea $p > 1$. Si al menos uno de los sumandos en el lado derecho de (4) es infinito, entonces la desigualdad se cumple. Supongamos que ambos sumandos son finitos. Por el Lema 5, obtenemos que $N_p(f+g) < +\infty$.

Si $N_p(f+g) = 0$, entonces la desigualdad es obvia. Suponemos que $N_p(f+g) > 0$. Acotamos $|f+g|^p$ de la siguiente manera:

$$|f+g|^p = |f+g| \, |f+g|^{p-1} \le |f| \, |f+g|^{p-1} + |g| \, |f+g|^{p-1}.$$

Integramos cada uno de los sumandos en el lado derecho. Aplicamos la desigualdad de Hölder y el Lema 6 con $h = |f+g|$:

$$\int_X |f| \, |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \le N_p(f) N_q(|f+g|^{p-1}) = N_p(f) N_p(f+g)^{p/q},$$

$$\int_X |g| \, |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \le N_p(g) N_q(|f+g|^{p-1}) = N_p(g) N_p(f+g)^{p/q}.$$

Luego

$$N_p(f+g)^p = \int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \le \big(N_p(f) + N_p(g)\big) \, N_p(f+g)^{p/q}. \tag{5}$$

Dividimos ambos lados de (5) entre $N_p(f+g)^{p/q}$ y notamos que $p - \frac{p}{q} = 1$. $\square$

8 Proposición (criterio de igualdad en la desigualdad de Minkowski)**.** *Sean* $p \in [1, +\infty)$, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ *tales que* $N_p(f) < +\infty$, $N_p(g) < +\infty$*. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) $N_p(f+g) = N_p(f) + N_p(g)$*;*

(b) existen $\alpha, \beta \ge 0$ *tales que* $\alpha + \beta > 0$ *y* $\alpha f = \beta g$ *c.t.p.*

9 Ejercicio. Demostrar la Proposición 8. Se recomienda usar el criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder.