Desigualdades de Márkov y Chebyshov

Objetivos. Demostrar la desigualdad de Márkov (también conocida como la desigualdad de Chebyshov) y conocer algunas de sus aplicaciones.

Requisitos. Propiedades de la integral de funciones medibles positivas.

Repaso de las herramientas auxiliares

1 Proposición (monotonía de la integral respecto a la función de integración, repaso)**.** *Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para cada x en X. Entonces,*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

2 Proposición (monotonía de la integral respecto al conjunto de integración, repaso)**.** *Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces,*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

3 Proposición (pasar de la integral sobre un conjunto a la integral sobre todo el espacio, repaso)**.** *Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ y $A \in \mathcal{F}$. Entonces,*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

4 Proposición (monotonía de la integral sobre un conjunto fijo respecto a la función de integración, repaso)**.** *Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$, $A \in \mathcal{F}$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para cada x en A. Entonces,*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A g \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de la demostración. $\mathbb{1}_A f \leq \mathbb{1}_A g$. □

5 Proposición (fórmula para la integral de una función que es constante en el conjunto de integración)**.** *Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$, $A \in \mathcal{F}$, $v \in [0, +\infty)$ tales que $f(x) = v$ para cada x en A. Entonces,*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = v \, \mu(A).$$

Idea de la demostración. $\mathbb{1}_A f = v \, \mathbb{1}_A$. □

Desigualdad de Márkov

6 Ejercicio (un ejercicio introductorio para entender la idea)**.** Supongamos que 25 palomas están distribuidas de alguna manera en cajones. ¿Cuántos cajones tienen al menos 4 palomas?

Respuesta. No más de 6. □

7 Ejercicio (Otro ejercicio introductorio)**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ tal que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 25.$$

Acotar por arriba $\mu(A)$, donde

$$A \coloneqq \{x \in X \colon \ f(x) \geq 4\}.$$

8 Teorema (desigualdad de Márkov)**.** *Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ y sea $v > 0$. Entonces,*

$$\mu\big\{x \in X \colon \ f(x) \geq v\big\} \leq \frac{1}{v} \int_X f \, \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

Primera demostración. Denotemos el conjunto $\{x \in X \colon \ f(x) \geq v\}$ por $A(f, v)$:

$$A(f, v) \coloneqq \big\{x \in X \colon \ f(x) \geq v\big\}.$$

Entonces,

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{A(f,v)} f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{A(f,v)} v \, \mathrm{d}\mu = v \, \mu(A(f, v)).$$

Explicar cada paso en esta cadena de desigualdades. Despejando $\mu(A(f, v))$ obtenemos (1). □

Segunda demostración. Es muy similar a la primera, pero usamos más la función indicadora. Notemos que $f \geq v \, \mathbb{1}_{A(f,v)}$. Luego

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X v \, \mathbb{1}_{A(f,v)} \, \mathrm{d}\mu = v \, \mu(A(f, v)).$$

Justificar cada paso en este razanamiento. □

A pesar de ser muy simple, la desigualdad de Márkov tiene varias aplicaciones importantes. Ahora veremos algunas de las aplicaciones inmediatas.

Acotación del conjunto que corresponde al valor infinito

9 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ tal que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Usando la desigualdad de Márkov, demostrar que $\mu(E) = 0$, donde

$$E \coloneqq \{x \in X \colon \ f(x) = +\infty\}.$$

Sugerencia: comparar el conjunto E con los conjuntos $A(f, v)$.

Aplicación a una función no negativa con integral nula

10 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ tal que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostrar que

$$\forall v > 0 \qquad \mu(A(f, v)) = 0.$$

11 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ tal que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Sea

$$P \coloneqq \Big\{x \in X \colon \ f(x) > 0\Big\}.$$

Demostrar que $\mu(P) = 0$. Sugerencia: representar el intervalo $(0, +\infty]$ como una unión numerable de intervalos de la forma $[v, +\infty]$ con algunos $v > 0$, luego aplicar el resultado del Ejercicio 10 y la propiedad subaditiva de la medida μ.

Aplicación a las composiciones de funciones

12 Proposición (desigualdad de Márkov para composiciones de funciones)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$. Además, sea $g \colon [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ una función creciente. Entonces para cada $v > 0$*

$$\mu\Big(\{x \in X \colon \ f(x) \geq v\}\Big) \leq \frac{1}{g(v)} \int_X g \circ f \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Demostración. Se obtiene al aplicar (1) a la función $g \circ f$, porque

$$\{x \in X \colon \ f(x) \geq v\} \subseteq \{x \in X \colon \ g(f(x)) \geq g(v)\}. \qquad \square$$

13 Ejercicio. Escribir (2) para $g(t) = t^p$ con $p > 0$.

La siguiente propiedad requiere algunas propiedades adicionales de la integral. En este momento no estamos listos para demostrarla.

14 Proposición (desigualdad de Chebyshov)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad, esto es, un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$. Además, sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que*

$$\int_X |f|^2 \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Denotemos por a al valor esperado de f:

$$a = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces, para cada $\delta > 0$ se tiene

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \ |f(x) - a| \geq \delta\big\}\Big) \leq \frac{1}{\delta^2} \int_X |f - a|^2 \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Aplicar (2) con una función apropiada g. □