Desigualdades de Márkov y Chebyshov

Objetivos. Demostrar la desigualdad de Márkov (también conocida como la desigualdad de Chebyshov) y conocer algunas de sus aplicaciones.

Requisitos. Propiedades de la integral de funciones medibles positivas.

Repaso de las herramientas auxiliares

1 Proposición (monotonía de la integral respecto a la función de integración, repaso)**.** *Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ tales que $f(x) \le g(x)$ para cada x en X. Entonces*

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_X g \,\mu(A).$$

2 Proposición (monotonía de la integral respecto al conjunto de integración, repaso)**.** *Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces*

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_B f \,\mu(A).$$

3 Proposición (pasar de la integral sobre un conjunto a la integral sobre todo el espacio, repaso)**.** *Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y $A \in \mathcal{F}$. Entonces*

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_X \mathbb{1}_A f \,\mu(A).$$

4 Proposición (monotonía de la integral sobre un conjunto fijo respecto a la función de integración, repaso)**.** *Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$, $A \in \mathcal{F}$ tales que $f(x) \le g(x)$ para cada x en A. Entonces*

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_A g \,\mu(A).$$

Idea de la demostración. $\mathbb{1}_A f \le \mathbb{1}_A g$. □

5 Proposición (fórmula para la integral de una función que es constante en el conjunto de integración)**.** *Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$, $A \in \mathcal{F}$, $v \in [0, +\infty)$ tales que $f(x) = v$ para cada x en A. Entonces*

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = v\,\mu(A).$$

Idea de la demostración. $\mathbb{1}_A f = v\,\mathbb{1}_A$. □

Desigualdad de Márkov

6 Ejercicio (un ejercicio introductorio para entender la idea)**.** Supongamos que 25 palomas están distribuidas de alguna manera en cajones. ¿Cuántos cajones tienen al menos 4 palomas?

Respuesta. No más de 6. $\square$

7 Ejercicio. Otro ejercicio introductorio (se recomienda resolverlo antes de ver el resultado general) Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ tal que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 25.$$

Acotar por arriba $\mu(A)$, donde

$$A \coloneqq \{x \in X: \; f(x) \geq 4\}.$$

8 Teorema (desigualdad de Márkov)**.** *Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y sea $v > 0$. Entonces*

$$\mu\big\{x \in X: \; f(x) \geq v\big\} \leq \frac{1}{v} \int_X f \, \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

Primera demostración. Denotemos el conjunto $\{x \in X: \; f(x) \geq v\}$ por $A(f, v)$:

$$A(f, v) \coloneqq \big\{x \in X: \; f(x) \geq v\big\}.$$

Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{A(f,v)} f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{A(f,v)} v \, \mathrm{d}\mu = v \, \mu(A(f, v)).$$

Explicar cada paso en esta cadena de desigualdades. Despejando $\mu(A(f, v))$ obtenemos (1). $\square$

Segunda demostración. Es muy similar a la primera, pero usamos más la función indicadora. Notemos que $f \geq v \, \mathbb{1}_{A(f,v)}$. Luego

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X v \, \mathbb{1}_{A(f,v)} \, \mathrm{d}\mu = v \, \mu(A(f, v)).$$

Justificar cada paso en este razanamiento. $\square$

A pesar de ser muy simple, la desigualdad de Márkov tiene varias aplicaciones importantes. Ahora veremos algunas de las aplicaciones inmediatas.

Acotación del conjunto que corresponde al valor infinito

9 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ tal que

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Usando la desigualdad de Márkov, demostrar que $\mu(E) = 0$, donde

$$E \coloneqq \{x \in X \colon \; f(x) = +\infty\}.$$

Sugerencia: comparar el conjunto E con los conjuntos $A(f, v)$.

Aplicación a una función no negativa con integral nula

10 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ tal que

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostrar que para cada $v > 0$ se tiene $\mu(A(f, v)) = 0$.

11 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ tal que

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostrar que

$$\mu\{x \in X \colon \; f(x) > 0\} = 0.$$

Sugerencia: representar el intervalo $(0, +\infty]$ como una unión numerable de intervalos de la forma $[v, +\infty]$ con algunos $v > 0$, luego aplicar el resultado del Ejercicio 10 y la propiedad subaditiva de la medida μ.

Aplicación a las composiciones de funciones

12 Proposición (desigualdad de Márkov para composiciones de funciones)**.** *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$*. Además sea* $g \colon \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *una función creciente. Entonces para cada* $v > 0$

$$\mu(\{x \in X \colon \; f(x) \geq v\}) \leq \frac{1}{g(v)} \int\limits_X g \circ f \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Demostración. Se obtiene al aplicar (1) a la función $g \circ f$, porque

$$\{x \in X \colon \; f(x) \geq v\} \subseteq \{x \in X \colon \; g(f(x)) \geq g(v)\}. \qquad \square$$

13 Ejercicio. Escribir (2) para $g(t) = t^p$ con $p > 0$.

La siguiente propiedad requiere algunas propiedades adicionales de la integral, por ejemplo, la desigualdad de Hölder o la comparación de los espacios $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, cuando se cambia p. Vamos a enunciar esta propiedad aquí pasar subir la motivación del lector.

14 Proposición (desigualdad de Chebyshov)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad, esto es, un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$. Además, sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que*

$$\int\limits_X |f|^2 \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Denotemos por a al valor esperado de f:

$$a = \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces para cada $\delta > 0$ se tiene

$$\mu\{x \in X\colon \ |f(x) - a| \geq \delta\} \leq \frac{1}{\delta^2} \int\limits_X |f - a|^2 \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Aplicar (2) con una función apropiada g. $\square$