# Desigualdades de Márkov y Chebyshov

**Objetivos.** Demostrar la desigualdad de Márkov (también conocida como la desigualdad de Chebyshov) y conocer algunas de sus aplicaciones.

**Requisitos.** Propiedades de la integral de funciones medibles positivas.

**1. Ejercicio introductorio para entender la idea.** Supongamos que 25 palomas están distribuidas de alguna manera en cajones. ¿Cuántos cajones tienen al menos 4 palomas?

*Respuesta.* No más de 6. □

**2. Monotonía de la integral con respecto a la función de integración (repaso).** Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \le g(x)$ para cada $x \in A$. Entonces

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \le \int_A g \,\mu(A).$$

**3. Otro ejercicio introductorio (se recomienda resolverlo antes de ver el resultado general).** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ tal que

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 10.$$

Acotar por arriba $\mu(A)$, donde $\quad A = \{x \in X\colon\ f(x) \ge 5\}$.

**4. Teorema (desigualdad de Márkov).** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y sea $v > 0$. Entonces

$$\mu\{x \in X\colon\ f(x) \ge v\} \le \frac{1}{v} \int_X f \,\mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

*Demostración.* Denotemos el conjunto $\{x \in X\colon\ f(x) \ge v\}$ por $A$. Entonces

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \ge \int_A f \,\mathrm{d}\mu \ge \int_A v \,\mathrm{d}\mu = v\,\mu(A).$$

Despejando $\mu(A)$ obtenemos (1). □

A pesar de ser muy simple, la desigualdad de Márkov tiene aplicaciones importantes. Ahora veremos dos de estas.

## Aplicación a una función no negativa con integral nula

**5. Ejercicio.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ tal que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Usando la desigualdad de Márkov demuestre que para cada $v > 0$

$$\mu\{x \in X\colon\ f(x) \geq v\} = 0.$$

**6. Ejercicio.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ tal que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demuestre que

$$\mu\{x \in X\colon\ f(x) > 0\} = 0.$$

Sugerencia: represente el intervalo $(0, +\infty]$ como una unión numerable de intervalos de la forma $[v, +\infty]$ con algunos $v > 0$, luego aplique el resultado del Ejercicio 5 y la propiedad subaditiva de la medida $\mu$.

## Aplicación a la composición de funciones

**7. Corolario de la desigualdad de Márkov (desigualdad de Márkov para composiciones de funciones).** Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Además sea $g\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función creciente. Entonces para cada $v > 0$

$$\mu(\{x \in X\colon\ f(x) \geq v\}) \leq \frac{1}{g(v)} \int_X g \circ f \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

*Demostración.* Se obtiene al aplicar (1) a la función $g \circ f$, porque

$$\{x \in X\colon\ f(x) \geq v\} \subset \{x \in X\colon\ g(f(x)) \geq g(v)\}. \qquad \square$$

**8. Ejercicio.** Escribir (2) para $g(t) = t^p$ con $p > 0$.

**9. Desigualdad de Chebyshov.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad, esto es un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$. Además, sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Denotemos por $a$ al valor esperado de $f$:

$$a = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces para cada $\delta > 0$

$$\mu\{x \in X\colon\ |f(x) - a| \geq \delta\} \leq \frac{1}{\delta^2} \int_X |f - a|^2 \, \mathrm{d}\mu.$$

*Idea de demostración.* Aplicar (2) con una función apropiada $g$. $\square$